

## Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Ein philosophischer Beitrag zur Grundlagenkrise der Mathematik.

Von Caspar Nink S. J.

Die Mathematik, die man nach altem Herkommen als die best begründete der Wissenschaften und das Vorbild der Wissenschaftlichkeit zu betrachten pflegt, ist in der Gegenwart zum Gegenstand ernster Diskussion geworden, die sich auf ihren Sinn und die Deutung ihrer Fundamente bezieht. Die Diskussion wird in so radikaler Weise geführt, daß H. Weyl einmal bemerkt, mit Schmerzen sehe der Mathematiker „den größten Teil seines, wie er meinte, aus festen Quadern gefügten Turmbaues in Nebel zergehen“.

Insbesondere hat sich um die Jahrhundertwende herausgestellt, daß die zum Aufbau der modernen Kontinuumsmathematik erforderlichen Mengen- und Klassifikationsbegriffe bei unbegrenzter Wiederholung schließlich auf Widersprüche führen, durch die der Bestand dieser Mathematik auf das ernsteste bedroht wird. Großartige Versuche und geniale Anstrengungen sind seitdem gemacht worden, um die Widersprüche zu beseitigen. Völlig überzeugend scheint keiner von ihnen. Die Erörterung ist in ihrem tiefsten Wesen eine philosophische und verrät tatsächlich Einwirkungen von Grundanschauungen, die auf philosophischem Gebiet umstritten sind. Wenn gerade in der Gegenwart eine solche Grundlagenkrise besteht, wie sie die Vergangenheit — abgesehen von verschwindenden Ausnahmen — nicht kannte, so rührt das daher, daß die neuere Zeit das wissenschaftliche Interesse allen Gebieten zuwendet und dabei die Unsicherheit, die ihr in den philosophischen Grundfragen so fühlbar geworden ist, unvermeidlich und folgerichtig auch auf die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften ausdehnt.

An dieser Stelle sei eine von den sogenannten „Antinomien der Mengenlehre“ behandelt, die neuerdings von Mengentheoretikern vertretene Auffassung, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, nach dem von zwei kontradiktorisch entgegengesetzten Urteilen eines wahr sein muß und eines falsch, im Gebiet der endlosen Zahlfolgen gewisse Ausnahmen erleide.

Es lassen sich zwei Arten endloser Zahlfolgen unterscheiden:

1. die *gesetzmäßig* bestimmten Folgen, z. B. die unbeschränkt fortsetzbare Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 ... in infinitum;

2. die sogenannten *frei werdenden Wahlfolgen* und zwar entweder die völlig freien Wahlfolgen, bei denen die einzelnen Zah-

len ganz beliebig nacheinander gewählt werden, oder Wahlfolgen mit gewissen einschränkenden Bedingungen, oder endlich solche Folgen, bei denen Schritt für Schritt die einzelnen Glieder nach bestimmten Regeln festgelegt werden.

Wenn nun die Glieder einer endlosen *frei werdenden* Folge  $F$  seien: 1, 6, 28, 3, 9, 11 . . . , so könne man im gegenwärtigen Augenblick dieser Folge die Eigenschaft zusprechen: „ $F$  enthält die Zahl 9“, nicht aber „ $F$  enthält die Zahl 4“ noch auch „ $F$  enthält die Zahl 4 nicht“. Denn darüber sei noch keine Entscheidung gefallen. Es scheine also der Satz vom ausgeschlossenen Dritten im Gebiet der endlosen frei werdenden Zahlfolgen gewisse Ausnahmen zu erleiden. Die Disjunktion: „Entweder gibt es in der frei werdenden Zahlfolge eine Zahl mit der Eigenschaft  $E$  oder nicht“, sei keine echte Disjunktion. Somit erleide für sie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten eine Ausnahme. Es sei einsichtig gegeben, daß die Disjunktion: „Eine Zahl mit der Eigenschaft  $E$  ist in der frei werdenden Zahlfolge  $F$  entweder enthalten oder nicht“, keine Gültigkeit habe<sup>1</sup>.

Über die völlig „frei werdende“ — richtiger wäre zu sagen: frei zu wählende oder zu bestimmende — Zahlfolge  $F$ : 1, 6, 28, 3, 9, 11 . . . ist hinsichtlich der noch nicht bestimmten Glieder sowohl die Aussage: „ $F$  enthält die Zahl 4“ sinnlos und unmöglich, wie auch sinnlos und unmöglich die andere Aussage: „ $F$  enthält die Zahl 4 nicht“; sondern sinnvoll läßt sich nur sagen:  $F$  *kann* die Zahl 4 enthalten oder nicht. Vorgängig zu der in einem bestimmten Zeitpunkt völlig frei erfolgenden Bestimmung oder Wahl einer Zahlfolge sind alle Zahlfolgen *möglich*, doch ist in diesem Moment noch nicht entschieden, welche Folge *tatsächlich* in einem determinierten Zeitpunkt frei bestimmt wird. Infolgedessen kann auch in diesem Moment der noch nicht bestimmten Zahlfolge nicht sinnvoll eine bestimmte Zahl zu- oder abgesprochen werden<sup>2</sup>. Bezüglich der

<sup>1</sup> So vor allem L. E. J. Brouwer, *Intuitionisme en formalisme*, Amsterdam 1912; in engl. Übersetzung: *Bull. Amer. Math. Soc.* 20 (1913). Ders., *Intuitionistische Mengenlehre* (Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver. 28 [1919] 203—208). An letzterer Stelle (203 f. Anm. 4) spricht Br. als seine Überzeugung aus, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten falsch und der Glaube an ihn historisch dadurch verursacht worden sei, „daß man zunächst aus der Mathematik der Teilmengen einer bestimmten endlichen Menge die klassische Logik abstrahiert, sodann dieser Logik eine von der Mathematik unabhängige Existenz a priori zugeschrieben und sie schließlich auf Grund dieser vermeintlichen Apriorität unberechtigterweise auf die Mathematik der unendlichen Mengen angewandt habe“. Vgl. O. Becker, *Mathematische Existenz* (Jahrb. f. Philos. u. phänom. Forschung 8 [1927] 448 ff., 495, 504 ff.).

<sup>2</sup> Kenner der scholastischen Philosophie werden hier eine enge Berührung mit der in der Philosophischen Gotteslehre behandelten

noch nicht bestimmten Folge ist es sinnlos, sowohl zu sagen: „F enthält die Eigenschaft E“, wie auch: „F enthält die Eigenschaft E nicht“. Man kann darum auch nicht sagen, es sei einsichtig gegeben, daß die Disjunktion: „Eine Zahl mit der Eigenschaft E ist in der frei werdenden Zahlfolge entweder enthalten oder nicht“, keine Gültigkeit habe; sondern es ist zu sagen: Über die frei zu bestimmende Zahlfolge F ist jede Aussage und deshalb auch jede Disjunktion, die gegen ihren Sinn verstößt, widerspruchsvoll, sinnlos. Die Prinzipien vom Widerspruch und ausgeschlossenen Dritten gelten, wie sie mit dem Wesen des Seins gegeben sind, absolut ausnahmslos von dem, was ist, d. h. von dem, was entweder da ist oder da sein kann. Das Widerspruchsvolle, Sinnlose aber ist nicht und kann nicht sein.

Von den *gesetzmäßig* bestimmten Zahlfolgen lassen sich deshalb bestimmte Aussagen machen, weil die Gesetzmäßigkeit Bestimmtheit des Zusammenhangs besagt. Auch von den frei gewählten Zahlfolgen sind dann und *insoweit* bestimmte Aussagen möglich, als durch einschränkende Bedingungen oder durch bestimmte Regeln eine Bestimmtheit des Zusammenhangs entsteht.

Im Prinzip dasselbe Problem wurde schon durch Siger von Brabant in seinen *Impossibilia* behandelt<sup>3</sup>. Dort wird für den Satz: Es ist unmöglich, daß etwas zugleich sei und nicht sei und daß kontradiktorisch Entgegengesetztes von einander oder von Demselben in Wahrheit ausgesagt werde (Edit. Baeumker 27, 6—9), demselben folgender Beweis versucht, und zwar nach einer Aporie des Aristoteles über das kontingent Zukünftige, *Peri herm.* c. 9 p. 18 a 33 — b 25: Daß ein Seekrieg morgen stattfinden werde, ist nicht wahr, weil es dann unmöglich wäre, daß er nicht stattfände. Es ist also falsch, daß der Seekrieg stattfinden wird. Aber ebenso läßt sich umgekehrt argumentieren: Es ist nicht wahr, daß der Seekrieg nicht morgen stattfinden wird. Denn dann wäre es *notwendig*, daß er nicht stattfinden wird. Also ist es falsch, daß er nicht stattfinden wird. Also wahr, daß er stattfinden wird. Mithin sind die kontradiktorisch entgegengesetzten Behauptungen, daß der Seekrieg morgen stattfinden wird, und daß er nicht stattfinden wird, zugleich wahr (Edit. Baeumker 27, 24 — 28, 6). — Das disputatorische Kunststück wird gelöst, ebenfalls nach Aristoteles p. 19 a 23—32: Das kontingent Zukünftige ist vor seinem Eintritt zu keinem der beiden kontradiktorischen Ge-

---

Frage feststellen, wie Gott die wirklich oder bedingt zukünftigen freien Willenshandlungen des Menschen erkennt.

<sup>3</sup> Edit. Cl. Baeumker, *Die Impossibilia des Siger von Brabant* (BeitrGPhMA II 6) Münster 1898.

gensätze bestimmt, sondern es *kann* sein und nicht sein. Es ist also wahr, daß der Seekrieg morgen stattfinden wird *oder* nicht stattfinden wird. Das einzelne Disjunktionsglied für sich genommen ist nicht nur nicht notwendig, sondern auch nicht wahr (Edit. Baeumker 31, 19—32, 6)<sup>4</sup>.

Die Frage ist noch tiefer durchzuführen. Woran liegt es, daß die *Daseinsbestimmtheit* bei den Prinzipien vom Widerspruch und ausgeschlossenen Dritten so bedeutsam ist? Steht das nicht ihrer absolut allgemeinen Gültigkeit entgegen?

Die Prinzipien vom Widerspruch und ausgeschlossenen Dritten ergeben sich aus dem Begriff des *Seienden* (ens)<sup>5</sup>. Das Seiende aber schließt in *allen* an ihm unterscheidbaren Rücksichten innerlich notwendig die Beziehung auf das Dasein, den actus ein; doch braucht diese Beziehung nicht in jeder Betrachtung berücksichtigt zu werden. Manche Betrachtungsweisen, auch die mathematische, abstrahieren von ihr. Der kontradiktorische Gegensatz ist mit dem Seienden gegeben<sup>6</sup>, insofern *es etwas ist*, also mit dem *actus*

<sup>4</sup> Nach H. Maier lehre Aristoteles p. 19 a 7—22: „Was in der Zukunft sein wird oder nicht sein wird, das ist in der Gegenwart möglich. Für das Mögliche aber gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht; denn seine Eigenart besteht darin, daß es beide Glieder eines kontradiktorischen Gegensatzes gleicherweise einschließt, daß es potentiell sowohl ist als nicht ist“ (Die Syllogistik des Aristoteles I, Tübingen 1896, 94 f. u. ö.). Indes läßt sich von dem Möglichen nicht sinnvoll sagen und wird auch von Aristoteles nicht gesagt, „daß es potentiell sowohl ist als nicht ist“, sondern es ist potentiell, nicht aber zugleich nicht potentiell; ein Ereignis, das möglich ist, kann in der Zukunft *wirklich* sein oder nicht; Wasser kann morgen warm oder nicht warm sein. Diese Aussage aber ist nicht identisch mit der andern: Die Eigenart des Möglichen besteht darin, „daß es potentiell sowohl ist als nicht ist“; das Wasser schließt nicht beide Glieder eines kontradiktorischen Gegensatzes gleicherweise ein; es kann nicht morgen zugleich warm und nicht warm sein. Das Mögliche schließt immer die Beziehung auf das *Dasein* ein. Man vgl. S. Thomas, In 1 Peri herm. lect. 14 u. 15, wo Thomas denselben Text, den H. Maier behandelt, ungezwungen und scharfsinnig so interpretiert, daß auch für das Mögliche der — seiner Natur nach absolut allgemeingültige — Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt.

<sup>5</sup> Der Seinsbegriff ist der logisch erste und allgemeinste Begriff, der auch jedem mathematischen Begriff, insbesondere den Begriffen der Menge, Teilmenge, endlichen und unendlichen Menge zugrunde liegt und nicht induktiv, sondern unmittelbar *abstraktiv-intellektiv* gewonnen wird. Die in ihm gründenden Prinzipien sind darum die logisch ersten und absolut ausnahmslos gültig. Sie liegen auch aller Mathematik zugrunde. Das nähere Verhältnis von Logik, Metaphysik und Mathematik soll an anderer Stelle dargelegt werden.

<sup>6</sup> In dem „gegeben“, das vom Begriff des Seienden unzertrennlich ist, steckt der Begriff des *Grundes*. Daß bei der Bestimmung

entis. Mit der Beziehung auf die Daseinsbestimmtheit ist alle Eindeutigkeit im Sein und Denken gegeben.

Das Widerspruchsprinzip drückt mithin einen *Sachverhalt* aus: was immer eine Sache (ein Seiendes, ein Etwas) *ist*, das kann sie (es) nicht zugleich *nicht sein*. Ein Sachverhalt (Seinsverhalt) als solcher ist nicht eine Sache oder ein Gegenstand, nicht Merkmal, noch physischer oder metaphysischer (innerer konstitutiver) Teil, noch Eigenschaft eines Gegenstandes, sondern Sachverhalt besagt, wie auch der Name anzeigt, ein *Verhältnis* (Verhalten, habitudo) der Sache, und zwar nicht bloß ein Verhältnis der Sache zu einer andern, sondern ursprünglicher und an erster Stelle das Verhältnis der Sache zu dem, was sie entweder innerlich notwendig oder nur tatsächlich ist, sein oder werden kann. Negativer Sachverhalt ist das, was eine Sache nicht ist, nicht sein oder werden kann. Sachverhalt (Sachverhältnis) schließt also immer ein relationales Moment ein: das Verhältnis der Sache zu dem, was sie *ist* oder nicht *ist*, also letzten Endes die Beziehung der Sache auf den *actus essendi*, das *Dasein*, und zwar entweder ihr eigenes Dasein oder das Dasein ihrer Bestimmungen<sup>7</sup>. Darum hat das ‚in derselben Hinsicht‘ eine so hohe Bedeutung beim Kontradiktionsprinzip; es betrifft sein innerstes Wesen. Immer hat man es empfunden, daß den Prinzipien ein Beziehungscharakter eigentümlich ist. Dieser ist dem Widerspruchsprinzip deshalb wesentlich, weil das Seiende (ens) zutiefst eine innerlich gegliederte, relationale Struktur hat, weil es innerlich auf das Dasein als seine Erfüllung ausgerichtet ist. Das Urverhalten des Seienden zu seiner Existenz liegt jedem weiteren Verhalten in actu secundo und überhaupt allen spezifischen und bestimmten Verhaltensweisen einer Sache zugrunde.

Mit dem Satz, daß die Prinzipien *Sachverhalte* ausdrücken, ist grundsätzlich die Frage beantwortet, die für die Anwendung der apriorischen Sätze auf das konkret Seiende entscheidend bedeutsam ist: Was ist das durch die Prinzipien ausgesagte *Unveränderliche*? Gibt es Unveränderliches in den kontingenten Dingen, die doch in unaufhörlichem Fluß und Wandel sind? Was ist ganz genau das Unveränderliche im Veränderlichen?

---

des inneren Verhältnisses der Begriffe (und Prinzipien) des Seins und Grundes nur der in seinem vollen Sinn, in seiner inneren Gliederung herausgestellte Begriff des Seienden als Grundlage dienen kann, ist selbstverständlich und nur aus äußeren Gründen mit Rücksicht auf die noch nicht zum Abschluß gekommene Diskussion der letzten Jahre eigens zu erwähnen. Wir müssen die Durchführung einer andern Gelegenheit überlassen.

<sup>7</sup> Dasselbe ist der Fall bei den Begriffen ‚*Tatbestand*‘: etwas besteht, ist; ‚*Sachlage*‘: eine Sache liegt so oder so; ‚*Tatsache*‘: eine Sache ist tatsächlich; ‚*Ereignis*‘: etwas ereignet sich; ‚*Geschehnis*‘: etwas geschieht; ‚*Vorgang*‘: etwas geht vor sich, u. a.

Das kontingenterweise *Seiende* ist naturhaft in ständiger Bewegung und Entwicklung, und es gibt kein einziges konkretes Teilchen und überhaupt nichts Konkretes an ihm, das nicht in Bewegung wäre. Von den wesensnotwendigen oder nur tatsächlicherweise bestehenden *Sachverhalten* eines Seienden *als solchen* aber läßt sich nicht mit Sinn aussagen, daß sie sich ändern oder allmählich zu etwas anderm entwickeln. Sokrates, das *ens totum*, ist bewegbar, steht still oder bewegt sich. Daß Sokrates sowohl innerlich notwendig verursacht, bewegbar, auflösbar (sterblich) usw. wie tatsächlicherweise existent, stillstehend, bewegt usw. ist, diese Sachverhalte, d. h. Beziehungen des Sokrates zu dem, was er ist (und sein kann), sind unveränderlich. Ob ich sage, Sokrates ist in Ruhe, oder Sokrates ist in Bewegung, in beiden Fällen besagt die Urteilskopula als solche nur den Sachverhalt der Identität von Subjekt und Prädikat, der als solcher besteht, nicht aber als solcher in Ruhe oder Bewegung sein kann. Weil alles kontingenterweise Seiende etwas ist (oder sein kann), weil es in seinem ganzen Sein auf den *actus* bezogen ist, deshalb hat es trotz der unaufhörlichen Bewegung, in der es naturhaft steht, in allem auch *unveränderliche* Sachverhalte, und zwar sowohl statische (logische) wie dynamische unveränderliche Sachverhalte<sup>8</sup>. Das ‚ist‘ im Werden ist undurchstreichbar. Das Werden weist auf das Sein zurück, ohne das es nicht begreifbar wäre. Ein ‚nur Werdendes‘, ein ‚reines Werden‘, das keine unveränderlichen Sachverhalte hätte, kann es somit gar nicht geben. *Etwas* wird und verändert sich. In allem Wandel gibt es Unwandelbares, Unvergängliches. Ich sehe meine Situation zwar in einer naturnotwendigen Bewegung, aber nicht nur in der Bewegung, ich erkenne auch ihre unwandelbaren Sachverhalte, die nicht davongleiten und verschwinden können<sup>9</sup>. Eine bestimmte Struktur hält sich durch in allem Wandel.

Die Wahrnehmung zwar bleibt im Bann des Werdenden und Fließenden und dringt nicht zum Unveränderlichen vor. Der Ver-

---

<sup>8</sup> Die Beziehung *als solche* ist ihrem Begriff nach keiner Steigerung und Minderung, keiner Veränderung fähig, sie besteht oder besteht nicht. Darin gründen die Sätze: „Relationes non recipiunt magis et minus“ (S. Thomas, S. theol. 1, 2 q. 82 a. 4), und: „Rerum etiam mutabilium sunt immobiles habitudines“ (I. c. 1 q. 84 a. 1 ad 3).

<sup>9</sup> Vgl. Platon, Theätet 182, 183, wo erörtert wird, daß von dem ‚nur Fließenden‘ überhaupt nichts mehr ausgesagt werden kann, weder: „Es ist so oder nicht so“, noch selbst: „Es *wird* so oder nicht so“. Von dem ‚nur Fließenden‘ wäre also gar keine Erkenntnis und Aussage möglich; kein Prinzip würde mehr gelten; es wäre nichts Festes mehr, alles in Frage gestellt, die Wissenschaft sinnlos, man könnte sich nicht mehr verstehen.

stand aber erkennt im Fließenden das Seiende, das im Fluß selbst nicht zerfließt. Das Tatsächliche steht in seinem Wandel unter absolut unveränderlichen Prinzipien, und seine Bewegung erfolgt nach Gesetzen, die in seiner spezifischen Natur gründen.

Die Gedanken weisen in vielerlei Hinsicht weit über sich hinaus. Keine einzige Frage der Philosophie läßt sich von den andern isolieren, sondern steht in innerem Zusammenhang mit allen.

## Der Weg der Theologie.

Von Heinrich Weisweiler S. J.

Emanuel Hirsch hat am 25. November 1936 über dieses Thema eine öffentliche Universitätsvorlesung zu Göttingen gehalten und sie jetzt zusammen mit einigen anderen hierhin gehörenden, aber meist bereits gedruckten eigenen Abhandlungen veröffentlicht<sup>1</sup>. Es ist in dieser Vorlesung, die wir hier behandeln, der Versuch unternommen, den Neuaufbruch deutschen Lebens und Wesens mit der Theologie zu verbinden. Christliche Religion hat eine doppelte Eigenart. Sie bindet in Freiheit den Menschen an die diesseitige Volksgemeinschaft; sie lehrt aber auch den Weg ins ewige Leben im Geheimnis des persönlichen Glaubens an Christus. Beides — Diesseits und Ewigkeit — sind aufs engste verbunden: Das Geheimnis, vor dem Unbegreiflichen zu stehen, nimmt alle Selbstsucht und führt den Menschen so rein zur christlichen Gemeinschaft. Die Kirche hat jedoch diese ihre hehre Aufgabe, den Menschen so in sinnvoller persönlicher Weise und nicht nur als Scharnier einer Maschine ins Volksganze zu stellen, immer weniger im Laufe der letzten Jahrhunderte erfüllt. Es ist zwar auch der andere neue Versuch der Deutschen Glaubensbewegung, eine neue Religion für diese Aufgabe zu gründen, fehlgeschlagen. Er hat wohl vermocht, den sich neu gebärenden Willen des Volkes zu sich selbst emporzutragen. Weil die neue Glaubensbewegung jedoch in der Frage des einzelnen Menschen zu seinem Gott nicht klar ist, läßt sie gerade im Letzten die Menschen in Ratlosigkeit stehen und wird daher nach Hirsch große Volksschichten jedenfalls nicht befriedigen. Der Grund aber, warum die christliche Kirche die an sie gestellte Aufgabe nicht erfüllen konnte, liegt in „ihrer so echt weiblichen, aus Angst und Trotz gemischten Ab-

---

<sup>1</sup> Emanuel Hirsch, *Der Weg der Theologie*. gr. 8<sup>o</sup> (128 S.) Stuttgart 1937, Kohlhammer. M 3.—.