Der Sinn der Mathematik.

Von Caspar Nink S. J.

Διὸ καὶ χωρίζει

(Aristoteles, Phys. II 2, 193 b 33.)

Gauß sagt in einem vielzitierten Brief an F. Bessel vom 27. 1. 1829: „Meine Überzeugung, daß wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist womöglich noch fester geworden“[1]. Dieses Wort läßt sich grundsätzlicher und weiter fassen: Keine Wissenschaft, auch nicht Geometrie und Arithmetik und selbst nicht die reine Logik, wird vollständig und in allem rein a priori und durch das menschliche Denken allein aufgebaut; keine *kann* schlechthin a priori und allein durch unser Denken aufgebaut werden, weil die Grundlagen des apriorischen Erkennens nicht selbst wiederum rein a priori oder rein logisch gewonnen werden können und weil der Gegenstand, auf den unser Denken sich bezieht, auch in den rein formalen Wissenschaften nicht unserm Denken entstammt, sondern gegeben ist. Ein Erkenntnisgebiet, das ganz und gar intelligibel und von jedem inintelligiblen Gehalt frei wäre, gibt es nicht für das menschliche Erkennen, das das Intelligible niemals in seiner reinen Form, sondern immer, auch in seinen höchsten Leistungen, in der Beziehung zum Sinnfälligen erfaßt, das immer auch ein Element enthält, das es nicht vollkommen durchdringen kann, sondern einfach hinnehmen und anerkennen muß. Wie ist dann aber der Sinn der mathematischen Grundsätze, der Definitionen, Axiome und Postulate zu bestimmen? Sind diese nicht freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, dem Menschengeist entsprungene Definitionen und Festsetzungen, denen strenggenommen die Prädikate „wahr oder unwahr“, „gültig oder ungültig“ nicht zukommen? Oder aber sind sie E r k e n n t n i s s e, die wahr und gültig sind. Wenn ja, w a s wird in diesen Grundsätzen erkannt? Woher stammen diese Erkenntnisse, diese fruchtbaren Grundlagen der mathematisch-logischen Deduktion, diese Grundsätze, die vorgängig zu den Erfahrungsurteilen und unabhängig von ihnen gültig, ja die logische Vorbedingung der Gültigkeit der empirischen Erkenntnisse sind? Worauf beruht ihr Wahrheits- und Gültigkeitsanspruch? Sollen selbst in die Grundlagen der reinen

---

[1] Werke 8, Leipzig 1900, 200.

Zahlenlehre, oder in die unvorstellbaren Verhältnisse der nichteuklidischen Geometrien Elemente eindringen, die letztlich aus der Anschauung stammen, die mithin auch vorstellbar sein müssen? Wir werden sehen, daß dies tatsächlich der Fall ist, daß trotzdem die Mathematik nicht zu einer Erfahrungswissenschaft gemacht wird und ihr absoluter Gewißheitscharakter erhalten bleibt.

Die alten und immer neuen Auseinandersetzungen zwischen Philosophie und Mathematik spiegeln naturgemäß den philosophischen Standpunkt der jeweils Beteiligten[2]. Im Diskussionszentrum steht das Problem der mathematischen Grundsätze. „Dies ist ein schwieriges Problem. Die vollständige Lösung ist noch nicht bekannt"[3]. „Der Tag ist noch nicht gekommen, wo in der Prinzipienforschung ein Autor auf den Ergebnissen des andern weiterbauen kann"[4]. In der Axiomatik der Geometrie — in der Arithmetik wird kaum von Axiomen gehandelt[5] — hat sich die Untersuchung, angefangen vom ersten Vorläufer der nichteuklidischen Geometrie, Gerolamo Saccheri S. J. (1667—1733), zwei Jahrhunderte lang allein im Rahmen mathematischer Fragestellungen vollzogen, führte aber schließlich zu so eigenartigen Sätzen, daß heute auch ihr ursprünglich philosophischer Sinn immer deutlicher hervortritt.

Tatsächlich umfaßt die Untersuchung der mathematischen Grundlagen eine doppelte Aufgabe: die philosophische Ergründung ihres Sinnes und die mathematische Erforschung der inneren Ordnung und Vollständigkeit der Axiome. In jeder der beiden Hinsichten ist die Erforschung noch nicht abgeschlossen. Unser Thema ist die philosophische Seite der Frage. In der Geltung der Axiome verbirgt sich ein Grundproblem der Philosophie. Darum hat die axiomatische Methode keineswegs die absolute Sicherheit der Erkenntnis begründen, sondern nur die Frage an einem scharf umrissenen Ort stellen können.

---

[2] Einen — lange nicht vollständigen — Überblick über die heute in unserer Frage herrschende große Meinungsverschiedenheit können die 34 „Communications" des internationalen Pariser Philosophenkongresses 1937 vermitteln, in: Travaux du IX^{e} Congrès international de Philosophie, hrsg. von R. Bayer, 6. Heft: Logique et Mathématiques, Paris 1937. — Den Standpunkt des Verfassers dieser Abhandlung siehe in: Sein und Erkennen, Leipzig 1938, bes. 200—234, 273—277.

[3] B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie, deutsch von E. J. Gumbel u. W. Gordon, München 1923, 205. Ähnlich L. Couturat, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik, deutsch von C. Siegel, Leipzig 1908, 314; H. Reichenbach, Philosophie der Raum-Zeit-Lehre, Berlin u. Leipzig 1928, 9.

[4] H. Weyl, Das Kontinuum, Leipzig 1918, III.

[5] Vgl. H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, in: Handbuch der Philosophie, hrsg. von A. Bäumler u. M. Schöter, Abt. II, München u. Berlin 1927, 27.

I. Die Grundlagen. Axiome.

1. Den *wirksamen* Anstoß *zum axiomatischen Aufbau der Geometrie* gab bereits für Euklid und viel mehr noch für die neuere Mathematik die Frage nach dem Verhältnis von Anschauung und Denken. Die Gültigkeit der geometrischen Axiome, so war der leitende Gedanke, kann nicht aus der flüchtigen und unzuverlässigen Anschauung abgelesen werden. Daher suchte besonders die neuere Mathematik — nach manchen Vorarbeiten vor allem *D. Hilbert*[6] — ihre Sätze nicht durch Berufung auf die flüchtige und unscharfe Anschauung zu beweisen, sondern aus ausdrücklich formulierten Grundsätzen alle weiteren Sätze rein logisch abzuleiten. Hilbert löst die Aufgabe einfach so, daß er festsetzt: die Grundbegriffe sollen eben dadurch definiert sein, daß sie den Inhalt der Axiome ausmachen[7]. Das Axiom, sagt *F. Klein,* ist mir *„die Forderung,* vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung *genaue Aussagen hineinlege"*[8]. Deshalb sind die Axiome Forderungen, Postulate, Festsetzungen[9]; diese Ausdrücke, die von Euklid unterschieden wurden, werden heute ohne wesentlichen Unterschied gebraucht; schon die ältesten Euklidinterpreten hatten die Grenze zwischen den Postulaten und Axiomen fließend gefunden und Umstellungen vorgenommen. Erreicht wird durch die Axiome, daß der Aufbau der Geometrie von den besonderen und ungeklärten Vorstellungen, die man mit undefinierten Begriffen verbindet, befreit ist und von exakt bestimmten Grundlagen aus in streng logischer Form erfolgt. Dem so scharf bestimmten Verfahren gegenüber dürfen Widerspruch und Zweifel die Augen nicht aufzuschlagen wagen, sondern müssen als unlogisch gelten. Wiewohl aber der axiomatische Aufbau der Mathematik eigentümlich ist, so wird doch anderseits keine einzige Wissenschaft mittels der wandelbaren Anschauung allein aufgebaut, vielmehr werden alle mittels des Intellekts aufgebaut, dessen ursprüngliche Tätigkeit vor allem darin besteht, im Zufälligen das absolut Notwendige, im Wandelbaren und Vergänglichen das absolut Unwandelbare und Unvergängliche, im Werdenden und Fließenden das Seiende und Bleibende zu erfassen. Gerade diese Sachverhalte kommen in den

---

[6] Grundlagen der Geometrie[6], Leipzig u. Berlin 1923. Das Buch gilt in mathematischer Hinsicht heute schon als klassisch.

[7] In ähnlicher Weise faßt L. Couturat die Grundbegriffe „als reine Symbole, deren Sinn unbestimmt und gleichgültig ist und die bloß der Bedingung unterworfen sind, den Grundsätzen zu genügen" (a. a. O. 39).

[8] Zur Nicht-Euklidischen Geometrie, in: Mathematische Annalen 37 (1890) 571.

[9] D. h., um unsere Lösung hier schon anzuzeigen: bestimmte Sachverhalte werden allein festgehalten, in diesem Sinn „festgesetzt" und „gefordert", während von andern abgesehen wird. Doch wird dieser Lösungsversuch, der auf die aristotelisch-scholastische Lehre von der Abstraktion und dem Zusammenwirken von Verstandes- und Sinneserkenntnis gegründet ist, in der philosophisch-mathematischen Grundlagenforschung der Gegenwart kaum in Erwägung gezogen, wie denn überhaupt der Abstraktionsbegriff unter dem Einfluß der vielen falschen Auffassungen, die sich im Lauf der Jahrhunderte an ihn angeschlossen haben, weithin in Verruf gekommen ist. Über die abstraktiv-intellektive Erkenntnis siehe Sein und Erkennen 75—124.

ersten Seinsprinzipien zum Ausdruck. Die Frage nach dem Sinn der mathematischen Axiome und der Art ihrer Erkenntnis nimmt durchaus keine Sonderstellung ein, sondern fällt unter die umfassendere Frage nach dem Gegenstand und Verhältnis der Sinnes- und Verstandestätigkeit.

2. Der Sinn der Axiome wird je nach dem einwirkenden philosophischen Standpunkt verschieden bestimmt, so daß die Ansichten so weit auseinandergehen wie die zugrunde liegenden erkenntnistheoretisch-metaphysischen Auffassungen. Alle zu nennen, ist hier nicht erfordert; erwähnt seien nur einige Anschauungen, die in der mathematischen Prinzipienforschung der Gegenwart hervorgetreten sind. Nach dem Vorgang von H. Poincaré fassen manche die Grundsätze als willkürliche Sätze oder freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, als konventionelle Definitionen, die weder wahr noch falsch, weder beweisbar noch widerlegbar seien, sondern einzig auf der Anwendung einfacher Zeichen beruhen, die einer Gesamtheit von Zeichen substituiert werden. Die wahrhaft reine Mathematik sei ein bloßes Spiel mit logischen Ableitungen, das nichts bedeutet. B. Russell hat deshalb gesagt: „Die Mathematik ist eine Wissenschaft, wo man niemals weiß, wovon man spricht, noch auch, ob das, was man sagt, wahr ist“[10]. Das Mathematische gilt als rein gedankliche Schöpfung unseres Wollens, die von gar keinen Zufällen, von nichts Gedankenfremdem etwas empfängt und irgendeinen Zwang erleidet[11].

Wären wirklich die mathematischen Grundsätze freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, so könnte die Mathematik als Ganzes nicht den Charakter absoluter, unveränderlicher Gültigkeit haben. Sie wäre nur in *dem* Sinn ein hypothetisch gültiges deduktives Wissenschaftssystem, als die aus den Festsetzungen entwickelten Deduktionen zwar logisch notwendig, die Deduktionsgrundlagen selbst aber nicht innerlich notwendig gültig wären. Wenn vollends die Axiome sogar der Prädikate „wahr“ und „falsch“, „gültig“ und „ungültig“ beraubt werden, so können sie auch nicht Quelle der Wahrheit, Gültigkeit und Folgerichtigkeit sein; diese Prädikate müßten mithin in der Mathematik ganz wegfallen. Die Mathematik erschiene als Niederschlag mathematisierender Tätigkeit, so wie die Kunst Niederschlag

---

[10] Noch radikaler früher Lorenz Oken (1779—1851): „Die Mathematik ist auf das Nichts begründet und entspringt mithin aus dem Nichts.“

[11] Vgl. L. Couturat, a. a. O. 4, 41 f., 263; W. Burkamp, Wirklichkeit und Sinn II, Berlin 1938, 211, 260 f.

des künstlerisch schaffenden Lebens ist. — Doch sollen hier nicht alle Konsequenzen entwickelt werden, wichtiger ist die positive Bestimmung des Sinnes der Axiome.

So sehr die Versenkung in die Zeichen, ihre Sprache und Gesetze die Meinung erwecken kann, die Mathematik habe es nur mit den selbstgeschaffenen Zeichen zu tun, so ist unser Geist doch in der Zuwendung zu den Zeichen und durch sie hindurch der Sache und ihren logisch notwendigen Sachverhalten zugewandt. Aber welcher Sache? Die reine Mathematik hat es ja gar nicht mit dem Wirklichen zu tun.

Die reine Mathematik ist eine formale Wissenschaft, d. h. sie betrachtet ihre Objekte, die Größenverhältnisse der Dinge (siehe unten Teil II), nur ihrem formalen Sinngehalt nach und abstrahiert davon, ob diese Sinngehalte wirklich sind; sie abstrahiert ferner davon, ob die Vielheitsverhältnisse rein als solche oder nur in Realidentität mit anderen Bestimmungen wirklich sein können; letzteres ist tatsächlich allein möglich. Jeder sinnvolle und formale Gehalt ist Sinn- und Formgehalt eines Seienden. Wie ohne Berücksichtigung der Abstraktion kein einziger Begriff richtig gefaßt werden kann, so läßt sich insbesondere kein mathematischer Begriff ohne Beachtung der Abstraktion in seinem Sinn und Ursprung richtig bestimmen. Das hat Aristoteles mit grundsätzlicher Klarheit und entschiedener Bestimmtheit ausgesprochen: „Der Mathematiker abstrahiert"[12]. Er abstrahiert aber nicht bloß von der Farbigkeit der Dinge und der gezeichneten Figuren, sondern auch von der Ungenauigkeit und den Störungen, die den Dingen und gezeichneten Figuren anhaften, und hat deshalb ganz exakte Gegenstände; die Abstraktion leistet zugleich das, was die heutige Mathematik „Idealisierung" nennt, welche die Vollendung der abstraktiv-intellektiven Erkenntnistätigkeit ist. Weder die irdischen Gegenstände zeigen genaue Gerade und Kreise, noch selbst die Bewegungen der Gestirne am Himmel sind von vollendeter Regelmäßigkeit und auch schon die Sterne selbst sind nicht etwa mathematische Punkte. Mathematisch exakte Parallelen, Geraden und Punkte können wir nicht mit Augen sehen, noch mit den feinsten Instrumenten zeichnen. Sie enthalten wohl das anschauliche Element der Ausdehnung bzw. ihrer Grenze, werden aber mittels des Verstandes in ihrer Reinheit und Exaktheit festgehalten. In der euklidischen Geometrie des dreidimensionalen, homogenen, unbegrenzten Raumes ist der Punkt die Grenze der Linie, die Linie die Grenze der Fläche, die Gerade die kürzeste Ver-

[12] Phys. II 2, 193 b 33.

bindung zweier Punkte, die Fläche die Grenze des Körpers, und Parallele sind Linien, die überall denselben Abstand haben.

Euklids Definitionen sind, wiewohl sie ein deskriptives Element enthalten, nicht bloß Deskriptionen und Hinweisungen auf anschaulich Aufgewiesenes, sondern begriffliche Fixierungen, die letzte anschaulich gegebene Elemente des dreidimensionalen, homogenen, unbegrenzten Raumes auf abstrakte Weise ausdrücken. Ob alle seine Definitionen scharf und regelrecht bestimmt sind, bleibe dahingestellt; oft ist ja bekanntlich schon gleich die erste euklidische Definition: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat", beanstandet worden: sie mache nur dem klar, was ein Punkt sei, der es schon wisse[13]; und ähnliche Einwände sind gegenüber anderen euklidischen Definitionen erhoben worden. Auf jeden Fall besagen diese Definitionen einen Gehalt, der weder dem Verstand entstammt, noch ganz von ihm durchdrungen werden kann, der vielmehr auch Elemente enthält, die aus der Anschauung bloß aufgenommen sind. Was Ausdehnung ist, läßt sich so wenig definieren und bedarf so wenig einer Definition wie eine Farbe. Ein freier Beschluß liegt insofern in den Definitionen vor, als aus der reichhaltigen Fülle der Seinselemente nur bestimmte, logisch einfache festgehalten werden. — Euklids *Postulate* und *Axiome* besagen Sachverhalte, die innerlich notwendig den definierten Gegenständen zukommen[14]. Euklids Geometrie hat darum logisch-ontologischen Charakter. Nicht die Axiome rein als solche, als „Sätze", sind ihr letztes Fundament, sondern die in den Axiomen ausgedrückten Seinssachverhalte. Die Geometrie ist eine apriorische Wissenschaft, insofern als die Postulate und Axiome in den Definitionen, und die Lehrsätze unmittelbar in den Postulaten und Axiomen und letztlich ebenfalls in den Definitionen gründen. Sie ist aber nicht ganz und in allem eine apriorische Wissenschaft, weil die letzten Grundlagen der Deduktion, die Definitionen, ihrerseits nicht wiederum a priori durch Folge-

---

[13] In gewisser Hinsicht wird das tatsächlich bei allen letzten Begriffen der Fall sein: *naturhaft* sind sie uns schon bekannt, und die philosophische Fixierung bringt das naturhaft Bekannte in seinem logisch gegliederten Aufbau zum reflexen Ausdruck.

[14] Axiome: für wahr gehaltene Sätze. Euklid sagt κοιναὶ ἔννοιαι: allgemein eingesehene Sätze; jeder, der den Sinn dieser Sätze versteht, gibt ihre Richtigkeit und Wahrheit zu. Als Grundlagen der Beweise können die Axiome nicht selbst wiederum bewiesen, sondern nur durch unmittelbare Einsicht als wahr erkannt werden. Über das Parallelenaxiom siehe hier I 5.

rung gewonnen werden, sondern dadurch, daß der Verstand die durch die Definitionen ausgedrückten Elemente unmittelbar im sinnfällig Gegebenen erkennt. Nicht die Begriffe werden mithin an die unbedingte Geltung der Axiome geknüpft, sondern die unbedingte Gültigkeit der Axiome gründet in dem durch die Begriffe ausgedrückten Gehalt[15]. Wäre freilich das räumlich Ausgedehnte ohne sinnhaften Gehalt, niemals ließen sich von ihm sinnvolle Sachverhalte in Wahrheit aussagen. Die Geometrie könnte nicht mehr von Ordnungsgesetzen und Beziehungszusammenhängen handeln. Allein, ein ganz uneidetisches, vollkommen gestalt- und formloses Material ist unmöglich. In jedem herrscht ein inneres Gesetz. Die formalen Urgrundgesetze erfassen das tiefste Innere der Natur. Das Reich der ewigen Wahrheiten erstreckt sich bis auf den letzten Grund der Tatsachenwahrheiten und erhebt sich zugleich über ihnen.

Hilberts Axiomatik bedeutet *mathematisch* insofern einen Fortschritt über die euklidische Elementargeometrie hinaus, als sie Lücken der euklidischen Axiomatik ergänzt, unausgesprochene Voraussetzungen in eigenen Axiomen formuliert und den Aufbau in logisch-systematischer Ordnung durchführt. Die ganze Geometrie wird logisch aus fünf Axiomgruppen, den Axiomen der „Verknüpfung", „Anordnung" und „Kongruenz", dem Axiom der „Parallelen" und den Axiomen der „Stetigkeit", zusammen aus 20 Axiomen abgeleitet[16]. In *philosophischer* Hinsicht erweckt Hilberts Axiomatik den Eindruck, als werde sie allein mittels des Denkens aufgebaut. Sie beginnt mit der *„Erklärung:* Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des *ersten* Systems nennen wir *Punkte* ...; die Dinge des *zweiten* Systems nennen wir *Gerade* ...; die Dinge des *dritten* Systems nennen wir *Ebenen* .... Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie *„liegen"*, *„zwischen"*, *„parallel"*, *„kongruent"*; *„stetig"*; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *„Axiome der Geometrie"*[17]. *Anschauliche* Elemente, die von der ratio nicht

[15] In der Diskussion der Gegenwart wird recht oft der gegenteilige Standpunkt eingenommen; vgl. z. B. O. Hölder, Die mathematische Methode, Berlin 1924, 397; W. Burkamp, a. a. O. II 209, 213; M. Schlick, Allgemeine Erkenntnislehre, Berlin 1918, 32 f.

[16] Früher, um 1880, hatte bereits *M. Pasch* die Axiome der Anordnung aufgedeckt. Die Herausschälung der geometrischen Axiome hat große Mühe gekostet.

[17] Grundlagen der Geometrie 2.

ganz durchdrungen, sondern nur näher fixiert und geordnet werden, sind in der Erklärung vorausgesetzt. Sie stecken sowohl in den Punkten, Geraden und Ebenen wie auch in ihren Beziehungen. Der Anteil der Anschauung läßt sich nicht dadurch ausschalten, daß man sagt: „Wir *denken* drei verschiedene Systeme von Dingen". Die Axiome der Geometrie sind aus den Grundsätzen der Logik nicht ableitbar.

Im Sinn der Axiome gründen ihre *Eigentümlichkeiten*. Als Ausdruck innerlich notwendiger Sachverhalte immer möglicher Dinge sind die Axiome sowohl widerspruchsfreie Sätze wie auch *Erkenntnisse*, die immer *wahr* und logisch notwendig *gültig* sind, auch dann, wenn kein geschaffener Geist sie denkt. Ihre Gültigkeit ist *absolut*, unabhängig vom Dasein der zufälligen Dinge. Sie haben nicht bloß den hypothetischen Sinn: Wenn eine Gerade im euklidischen Raum existiert, ist sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte, sondern den absoluten Sinn: Die euklidische Gerade ist ihrem Wesen nach die kürzeste Verbindung zweier Punkte[18]. Das *Kriterium* ihrer Wahrheit ist die Sache selbst, die in ihren einfachen und durchsichtigen logischen Sachverhalten vom Verstande so leicht und sicher erkannt wird, daß die Gewißheit der Mathematik sprichwörtlich ist. Als apriorische Erkenntnisse sind die Axiome zugleich *Vor*erkenntnisse, die zwar nichts über das Daß-sein eines Dinges aussagen können, wohl aber innerlich notwendige Wesenssachverhalte ausdrücken, die den Dingen auch in der Zukunft zukommen. Der Mathematik fällt darum nicht die mühsame und langwierige Aufgabe zu, Erfahrungstatsachen sammeln zu müssen, wie es die Naturwissenschaften tun, und doch ist sie in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit und anwendbar auf sie. Deshalb kann im Bunde mit der Mathematik die Naturwissenschaft tiefer in das Naturgeschehen eindringen. Auf Grund apriorischer Vorerkenntnisse tritt der Naturwissenschaftler nicht wie von ungefähr, sondern in sachgerechter Weise an die Tatsachen heran.

Allen denjenigen, die die mathematischen Grundsätze als vom Menschengeist selbst gesetzte oder als in unserem Geiste selbst vorgefundene Gebilde betrachten, gibt die Tatsache, daß „die Natur in mathematischer Sprache geschrieben ist" (Galilei), ein unlösbares Rätsel auf: Wie kommt es, daß Vernunft und Natur zusammenstimmen, daß das innerste Gesetz der denkenden menschlichen Vernunft zusammenfällt mit dem Gesetz, dem die Bewegung der körperlichen Masse gehorcht? Kant entstand daraus die wichtige Frage: Woher kommt die Übereinstimmung, die solche intellektuale Vorstellungen mit den Gegenständen haben sollen? Woher stimmen die axiomata der reinen Vernunft mit den Gegen-

---

[18] Näheres siehe Sein und Erkennen 119—121, 138 f., 386—392.

ständen überein, „ohne daß diese Übereinstimmung von der Erfahrung hat dürfen Hilfe entlehnen?"[19] Kant selbst kam von der Frage aus zum transzendentalen Idealismus. Tatsächlich enthält die Frage, so wie sie gestellt ist, den Kernsatz des transzendentalen Idealismus, daß der logische Gehalt der Erkenntnis unserm Geist entstammt, im Grunde schon in sich.

3. Die Erkenntnis der mathematischen Axiome erfolgt auf genau dieselbe Weise wie jene der ersten Prinzipien des Seins und des Denkens. Wie diese so können auch die Axiome nicht auf empirisch-induktivem Wege in ihrem Sinn und Recht erkannt werden. Keine empirische Messung, keine noch so große Anzahl wiederholter genauester Beobachtungen vermag uns die Gültigkeit auch nur der einfachsten geometrischen Sätze zu verbürgen. Das Formale, absolut Notwendige und Allgemeingültige der apriorischen Sätze läßt sich nicht durch Generalisierung schrittweise vom anschaulichen und zufälligen Sonderfall aus erreichen. Wir erkennen die Axiome unmittelbar, durch die unmittelbare Einsicht, daß mit Punkt, gerader Linie, ebener Fläche und ihren Beziehungen gewisse elementare Sachverhalte gegeben sind[20]. Und wie wir trotz der Unmittelbarkeit der Erkenntnis die ersten Seins- und Denkprinzipien in logischer Anordnung darstellen können, so ist das gleiche bei den mathematischen Axiomen der Fall, wie etwa die Durchführung in Hilberts „Grundlagen der Geometrie" zeigt. Die Anschauung gibt nicht nur den Anlaß zur Erkenntnis der geometrischen Axiome und Sätze — wie die platonische Ideenlehre meinte —, sondern wirkt insofern mit, als sie den Stoff bietet, in dem (unmittelbar oder mittelbar) und

---

[19] Brief an Marcus Herz vom 21. 2. 1772: Kants Schriften 10, 130 f. (Ak.-Ausg.).

[20] In *dieser* Hinsicht berührt sich unsere Auffassung mit der mathematischen Grundlagenbegründung des sog. „Intuitionismus", der lehrt, die logischen, arithmetischen und kombinatorischen Grundsachverhalte würden unmittelbar erfaßt, und nicht etwa als zweckmäßige oder gar willkürliche Annahmen an die Spitze der Erörterungen gestellt. Die Interpretation dieses unmittelbaren Erfassens ist freilich insofern wesentlich verschieden, als die Vertreter des Intuitionismus, L. E. J. Brouwer, H. Weyl u. a., die abstraktiv-intellektive Erkenntnis der mathematischen Grundverhältnisse nicht in Erwägung ziehen. Zum Intuitionismus vgl. O. Bekker, Mathematische Existenz, in: Jahrb. f. Philos. u. phänom. Forschung 8, Halle 1927, 445—453. — Die von Brouwer und manchen Mengentheoretikern vertretene Auffassung, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten im Gebiet der endlosen Zahlfolgen gewisse Ausnahmen erleide, ist dem Standpunkt des Intuitionismus nicht wesentlich und in sich irrig; vgl. C. Nink, Das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. Ein philosophischer Beitrag zur Grundlagenkrise der Mathematik, in: Schol 12 (1937) 552—558.

durch den (unmittelbar oder mittelbar) bestimmt der Verstand die geometrischen Verhältnisse erkennt[21]. Zwar stellen wir die mathematischen Sätze nicht mittels der Wahrnehmung, sondern mittels des Intellekts auf, aber als Leib-Geist-Wesen erkennen wir das Intelligible nur im Sinnfälligen oder mit Beziehung auf dieses und niemals, auch nicht im abstraktesten Denken, lösen wir uns vollständig von ihm los. Kein Begriff wird ohne Hinblick auf das Seiende aus dem Verstande konstruiert. Die rationale Methodik des Denkens gründet im rationalen Gehalt der Sache. Alle wissenschaftlichen Verfahrungsweisen: metaphysische Grundlegung, philosophische Ordnung, logische Durchgliederung, mathematische Berechnung und einzelwissenschaftliche Aufarbeitung sind an der Sache orientiert. Aus der naturhaften Bindung des Verstandes an das Sinnfällige erklärt sich die hohe Bedeutung, die gezeichnete Figuren in der mathematischen Beweisführung haben. Weil aber die mathematischen Sätze im Sinngehalt und nicht in der zufälligen Art der Figur gründen, können sie auch an einer bloß vorgestellten und schlecht gezeichneten Figur eingesehen werden. Die richtige mathematische Beweisführung bleibt immer im Zusammenhang mit der Erfahrung, sowohl an ihrem Ausgangspunkt wie in ihrem Verlauf und Ergebnis, und läßt deshalb die Anwendung ihrer Ergebnisse auf die Wirklichkeit zu.

Als Ausdruck der Größenverhältnisse rein als solcher haben die Axiome und die aus ihnen abgeleiteten Sätze einen rein formalen Charakter. Die Formalisierung ist der reinen Mathematik, ähnlich wie der reinen Logik, wesentlich. Das Mißverstehen ihres Sinnes wurde Philosophen und Mathematikern zum Anlaß, das Axiomensystem als logische Leerform möglicher Wissenschaften aufzufassen, oder als ein nach festen Regeln vor sich gehendes Spiel mit Zeichen. In Wahrheit besagt der Kosmos des gesetzlich Formalen innerlich notwendigen Seinszusammenhang. Wegen ihres formalen Charakters aber vermag die Mathematik Gegenstände ganz verschiedener Art zum Gegenstand *einer* Wissenschaft zu machen, ohne dazu der Kenntnis des spezifischen Inhalts der Einzelwissenschaften zu bedürfen. Darum kann sich die Hilbertsche Axiomatik als Ziel setzen, unser gesamtes mathematisches Wissen zu einem formalen, logisch-deduktiven, begriffsschriftlich ausgedrückten System

[21] Daß dies selbst bei den nichteuklidischen Geometrien und den höchsten Operationen der reinen Zahlenlehre der Fall ist, wird sich noch zeigen.

zu entwickeln, in das inhaltlich verschiedene Gebiete eingehen können.

4. Wie jede Wissenschaftsmethode hat auch die axiomatische Bedeutung nur auf ihrem Gegenstandsgebiet und bedarf der Ergänzung durch andere. „Leibniz glaubte, bei passender Definition der geometrischen Gebilde ohne Axiome auskommen zu können“[22]. In dieser, mathematisch heute zumeist abgelehnten Meinung zeigt sich der philosophisch richtige Gedanke an, daß in den Definitionen und letztlich in dem durch diese scharf herausgestellten sachlichen Gehalt der Gegenstand der Geometrie beschlossen ist. Immer, auch in der reinen Mathematik und im Ausbau ihrer formalen Axiome ist das (unmittelbar oder mittelbar) durch die Anschauung gegebene *Seiende* Gegenstand, Antrieb und Norm des Denkens.

Die axiomatische Methode besteht nach der schon von Platon gefaßten grundlegenden methodischen Maxime darin, die Grundbegriffe und Grundsätze, aus denen sich die sämtlichen Begriffe und Sätze einer Wissenschaft definitorisch bzw. deduktiv herleiten lassen, vollständig zu sammeln. Ist dies möglich, so wird das betreffende Sachgebiet *definit* genannt[23]. Von den Axiomen aus entscheidet dann die Mathematik grundsätzlich alle Fragen, die unter ausschließlicher Benutzung der in den axiomatischen Ansätzen definierten Begriffe formuliert werden können. Durch diese Methode wird ein exakt bestimmter Forschungsgang begründet und ein Abgleiten ins Unbestimmte verhindert. Die Frage ist: Kann der Weg zu neuen mathematischen Einsichten nur durch vorher festgelegte Begriffe und Axiome gebahnt werden? Dies ist infolge des apriorischen Charakters der Mathematik tatsächlich der Fall. Und so vollzieht sich ihre grundlegend wesentliche Arbeit in der logisch geordneten Aufstellung der Grundbegriffe und -sätze. Damit wird der spätere Ausbau der Lehrsätze und die Entwicklung höherer Formeln nicht in seiner Bedeutung herabgesetzt, aber grundsätzlich entscheidet sich jede mathematische Frage an den Grundlagen. Alle Operationen, die mit den sehr wenigen Grundelementen vorgenommen werden, erfolgen streng deduktiv, ohne irgendwelche Aufnahmen aus der Erfahrung an Wirklichkeiten, was nicht ausschließt, daß man an den definierten formal einfachen Gegenständen auf überraschende ideelle Sachverhalte und Zusammenhänge stößt. Mit Recht also wendet die heutige Mathematik gerade der Aufstellung der Axiome große Sorgfalt zu. Trotz der logisch grundlegenden Bedeutung aber steht der Axiomenbau nicht *vor* der auf ihn gegründeten Entwicklung der Lehrsätze vollendet da, sondern wird, wie alle Wissenschaft, in langsamem, entwicklungsreichem Gang durchgeführt[24]. Erst wenn die Wissenschaften

[22] O. Hölder, a. a. O. 12; vgl. 123.

[23] E. Husserl, Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie, Halle 1913, 135. O. Becker, a. a. O. 689, 719; H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft 16—22.

[24] Hieraus erklärt es sich, wenn die Frage nach der *Vollständigkeit* der Axiome ziemlich allgemein als nicht hinreichend scharf bestimmt betrachtet wird; vgl. H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft 20 f.; A. Fränkel, Einleitung in die Mengenlehre², Berlin 1923, 226—228; D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928, 33.

groß geworden sind, besinnen sie sich auf ihre Grundlagen und bauen sie ihre Methode aus. Weil aber die Axiome ihrerseits Ausdruck grundlegender Seinsverhalte sind, genügt zu ihrer Rechtfertigung nicht die Feststellung, daß sich eine Definition willig zu den Beweisen hergibt, daß man bei ihrer Entwicklung nirgends auf Widersprüche stößt und die Zusammenhänge scheinbar entlegener Sachen sehen kann. Vielmehr ist im *Seienden* der *positive Grund* für die Fruchtbarkeit einer Definition und die innere Ordnung der Axiome aufzuzeigen und die ganze mathematische Operationsbasis logisch zu durchforschen. Die Überzeugung von der Notwendigkeit dieser Aufgabe ist tatsächlich wirksam, wenn die Mathematik die Grundbegriffe und -sätze auf die kleinstmögliche Zahl zu reduzieren strebt.

Wiewohl aber die Axiome unmittelbar erkannte Sachverhalte der geometrischen Grundelemente aussprechen, sind sie doch wegen des innerlich zusammengesetzten Sinngehaltes ihrer Elemente, *philosophisch* betrachtet, höchstverdichtete, aus bestimmtem Denken stammende Urteile, die auf verwickelten Erkenntnissen ruhen und auf der Stufenleiter der Abstraktion unter den Erstprinzipien der Philosophie stehen. Exakte, scharf bestimmte Gegenstände sind näher bestimmte Gegenstände. Darum ist die mathematische Axiomatik eine „*zweite*“ Wissenschaft (im aristotelischen Sinn), welcher die philosophische Sinnergründung der mathematischen Grundelemente als „*erste*“ Wissenschaft logisch vorgeordnet ist. Vor dem Anfang aller Mathematik steht die Metaphysik. Das Metaphysische ließe sich nur dann aus den Grundlagen der Mathemathik wegschaffen, wenn aller Sinngehalt aus ihr weggeschafft würde, wenn m. a. W. die Mathematik nicht mehr sinnvolle Wissenschaft wäre. Jeder sinnhafte Gehalt nämlich ist sinnvoller *Seinsgehalt*. Die letzte Einsicht in das Wesen von Größe, Zahl, Vielheit, Linie, Fläche, von Theorie und den sie aufbauenden Begriffen und Gesetzen leistet die Philosophie[25]. Überall ist Metaphysik möglich.

5. Hat nicht die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie die alte Gewißheit von der Apriorität der geometrischen Erkenntnisse erschüttert? Gewiß ist das Beweisverfahren der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie nicht das erfahrungsmäßig-induktive. Wenn sie nun nicht a priori vorangingen, nähmen sie fürwahr eine einzigartige Sonderstellung ein, die kein Analogon hätte in unserem Erkenntnisleben. Zu fragen ist: Was besagt das Parallelenaxiom in der euklidischen Geometrie? Was seine Preisgabe, die zur Ausbildung der nichteuklidischen Geometrie geführt hat? Das Parallelenaxiom: Zu einer gegebenen Geraden läßt sich durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt nur eine Parallele ziehen[26], besagt ein dem dreidimensionalen, homogenen, unbegrenzten Raum wesentliches

[25] Vgl. E. Husserl, Logische Untersuchungen I³, Halle 1922, 253 f.

[26] Die Formulierungen sind bei inhaltlicher Gleichheit verschieden; vgl. O. Hölder, a. a. O. 16 f., 118.

Grundverhältnis, das zwar nicht in derselben Weise unmittelbar einleuchtend ist wie die in den übrigen euklidischen Grundsätzen ausgedrückten Grundverhältnisse, aber anderseits sich wohl nicht aus den andern Grundsätzen mittels *Beweises* finden läßt — die jahrhundertealten Beweisversuche sind alle ergebnislos geblieben[27] —, sondern ungeachtet seines größeren Inhalts als gleichursprünglich mit ihnen anzusehen ist[28]. Wenn man dieses Axiom fallen läßt und Geometrie im Gegensatz zu ihm aufbaut, bildet nicht mehr der euklidische dreidimensionale, homogene, unbegrenzte Raum die Beweisgrundlage, sondern eine davon verschiedene Raumform mit konstanter (oder variabler) negativer oder positiver Krümmung, die ihrerseits jeweils ein bestimmter Raum *im* euklidischen Raum ist, diesen also voraussetzt und daher nur mit Bezug auf ihn begreifbar ist. Die Anschauungsgrundlage ist dann in einem wichtigen Punkt zwar geändert, nicht aber beseitigt. Wenn eine bestimmte Raumform, etwa die hyperbolische (Lobatschewsky-Bolyai) oder die elliptische (Riemann-F. Klein), zugrundegelegt wird, müssen sich selbstverständlich andere Sätze ergeben als in der euklidischen Geometrie, und diese sind genau so a priori gültig wie die euklidischen. Die Winkelsumme im euklidischen Dreieck ist logisch notwendig 180 Grad, während sie im hyberbolischen und elliptischen Dreieck ebenso logisch notwendig kleiner bzw. größer als 180 Grad ist. Die Sätze der nichteuklidischen Geometrie widersprechen also denen der euklidischen Geometrie nicht, noch heben sie ihre apriorische Evidenz auf, sondern gelten ebenso a priori auf Grund bestimmt gearteter Gegenstände und lassen eine eindeutige Zuordnung zu den Sätzen der euklidischen Geometrie zu[29]. Der Raum, in dem wir leben, ist der dreidimensionale, homogene Raum[30]. Darum ist die euklidische die *natürliche*

[27] Beweisversuche bei den Griechen, Arabern, während der Renaissance und des 18. Jahrh. siehe bei R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, deutsch von H. Liebmann, 3. Aufl., Leipzig-Berlin 1921, 1—19. Neuere Beweisversuche von J. St. Mill, G. Heymans und H. Cornelius bei Hölder, a. a. O. 118—123.

[28] Vgl. Sein und Erkennen 216—220.

[29] F. Klein hat das euklidische Modell der nichteuklidischen Geometrie entworfen, d. h. eine Zuordnung hergestellt zwischen den Begriffen der euklidischen Geometrie, ihren Punkten, Geraden und Ebenen, ihrem Kongruenzbegriff usw., und den entsprechenden Begriffen der nichteuklidischen Geometrie, so daß damit auch jedem Satz der einen Geometrie ein Satz der anderen zugeordnet wurde.

[30] Die Frage, ob körperliches Sein notwendig dreidimensional sei, bleibe hier unentschieden. Kant meint in seiner Erstlingsschrift: Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte

und logisch einfachere Geometrie für uns. Ihre Sätze sind ihrem Ursprung und Sinn nach ohne weiteres auf die reale Welt anwendbar. Ihre Realgeltung braucht und kann nicht durch Messungen bewiesen werden, ebensowenig wie die Realgeltung des Widerspruchsprinzips durch nachprüfende Erfahrung bewiesen werden kann und braucht. Apriorische Sätze gelten vorgängig zu aller Erfahrung und sind die Bedingung der Möglichkeit für die Gültigkeit der Erfahrungsurteile.

Wenn in der neueren Mathematik von vier-, fünf- oder n-dimensionalen „Räumen" die Rede ist, sind rein *arithmetisch* konstruierte Verhältnisse gemeint. Entsprechend nämlich der Art und Weise, wie die dreidimensionale Geometrie durch die dreifache Zahlenmannigfaltigkeit ausgedrückt („abgebildet") wird, werden gewisse in der vier-, fünf- und n-fachen Zahlenmannigfaltigkeit gefundene Ergebnisse rückwärts in eine geometrische Sprache übersetzt. „Alle die Begriffsbildungen in der vierten oder fünften oder einer höheren ‚Dimension' haben im Grunde nur eine arithmetische Bedeutung und Berechtigung." „Was Riemann in seiner Mannigfaltigkeit eine ‚Linie' nennt, ist nichts anderes als eine (eindimensionale) und stetige Mannigfaltigkeit von Wertsystemen (Punkten)." Die „Kürzeste" ist „dasjenige Gebilde, das in der neuen ‚Geometrie', d. h. in der vorliegenden Zahlenmannigfaltigkeit, der G e r a d e n entspricht". Die kürzeste Verbindung zwischen einer so definierten Geraden und einem nicht auf ihr liegenden Punkt zu finden, heißt durch rechnerische Behandlung diejenige Relation zweier sich schneidender Geraden der Mannigfaltigkeit zu finden, die der *Rechtwinkligkeit* entspricht. Krümmung bedeutet in Riemanns Geometrie nicht, wie im gewöhnlichen Sprachgebrauch, die Abweichung von der geraden Richtung der Linie oder Fläche, sondern eine durch die *inneren* Eigenschaften der Mannigfaltigkeit definierte Größe, die sich im Falle einer Fläche, die im euklidischen Raum gelegen ist, mit dem deckt, was in diesem Falle in der gewöhnlichen Geometrie als Krümmung bezeichnet wird. Man könnte höchstens den Namen „Krümmung" anfechten[31]. Wenn Raum und Zeit als eine „vierdimensionale Mannigfaltigkeit" bezeichnet werden,

(1747) § 9 f., Gott hätte bei Erschaffung der Welt dem Raume auch andere Abmessungen geben können. (Ähnlich H. Weyl, a. a. O. 56.) Die Dreidimensionalität der gegenwärtigen Welt leitet Kant aus dem Wirkungsgesetz der physikalischen Kräfte ab. Gegen diesen Grund sind freilich Bedenken möglich; siehe O. Becker, a. a. O. 729 Anm. 2.

[31] O. Hölder, a. a. O. 125—129.

ist lediglich der Sachverhalt gemeint, daß erst vier Zahlen ein Ereignis der Welt festlegen, nämlich drei Zahlen für den räumlichen Ort und eine Zahl für die Zeit[32].

Wiewohl aber die euklidische und nichteuklidische Geometrie ihre Axiome auf Grund unmittelbarer Einsicht und ihre Lehrsätze auf Grund apriorischer Beweisführung aufstellen, enthalten sie notwendig ein Element, das letztlich aus der Anschauung stammt und nicht restlos begreifbar ist. Für die euklidische Geometrie bedarf das keiner weiteren Begründung. In der nichteuklidischen Geometrie und der reinen Zahlenlehre aber werden logisch notwendige Maß- und Vielheitsverhältnisse von Gegenständen rein als solche und in Absehung von den anderen Objektsbestimmungen erforscht. Jedes logische Verhältnis ist logisch notwendiges Verhältnis eines Seienden und jede Möglichkeit Möglichkeit eines Seienden[33]. Den Gegenstand aber, dessen Logizität und Möglichkeit der Intellekt erforscht, bildet er nicht, sondern nimmt er als ihm vorgegeben auf. Gegeben wird er ihm aber im Zustande der Leibgebundenheit unmittelbar oder mittelbar durch die Anschauung[34]. Dieses Grundgesetz unserer Erkenntnisgewinnung kennt natürlicherweise keine Ausnahme.

Die Mathematik ist demnach auch in ihren höchsten Leistungen eine Realwissenschaft. Immer hat ihr Denken die Tendenz, die Phänomene zu beherrschen, das Fließende zu fassen und durch das Gesetz zu fesseln. Auch jede Lösung eines Problems der reinen Zahlentheorie bedeutet ein tieferes Eindringen in den rationalen Gehalt des Seienden, selbst wenn ihre Brauchbarkeit zu Anwendungen nicht unmittelbar ersichtlich ist.

Die Widerspruchslosigkeit der einzelnen mathematischen Disziplinen wird vielfach durch die Methode der „Abbildung“ gezeigt, d. h. dadurch, daß die Begriffe und Sätze der nichteuklidischen

---

[32] H. Reichenbach, a. a. O. 132.

[33] Daß die Beziehung auf die Realität allen logischen Verhältnissen und innerlich möglichen Gebilden wesentlich ist, liegt, vom Standpunkt des erkenntnistheoretischen Realismus aus gesehen, analytisch im Begriff logischen Sinngehaltes und innerer Möglichkeit und kann nur bestritten werden, wenn die Abstraktion unbeachtet bleibt.

[34] Wenn Mathematiker, die sich viel mit nichteuklidischer Geometrie befassen, gelegentlich behaupten, daß ihnen allmählich die nichteuklidische Geometrie völlig anschaulich werde, so besteht folgende Sachlage: Der Mathematiker ordnet die Begriffe und Sätze der nichteuklidischen Geometrie den Begriffen und Sätzen der euklidischen zu und hat in diesen letzteren eine anschauliche „Abbildung“. Die Rechnungszeichen haben eine lebendige Kraft und verdeutlichen sinnlich eindrucksvoll die geistigen Operationen.

Geometrie Begriffen und Sätzen der euklidischen Geometrie zugeordnet und die Begriffe und Sätze der euklidischen Geometrie durch arithmetische Mannigfaltigkeiten ausgedrückt werden. Die Arithmetik ihrerseits gilt als ein von der Erfahrung unabhängiges und unbedingt gültiges apriorisches Gebiet, das die natürliche Grundlage für die Beweise der Widerspruchslosigkeit bildet. — Der Beweis läßt sich weiter zurückführen. Jeder sinnvolle Gehalt ist sinnvoller *Sachgehalt*. Darum bildet die Widerspruchslosigkeit einer Wissenschaft nicht ein Letztes, sondern gründet in der inneren Möglichkeit ihres Gegenstandes. Die Arithmetik hat als Objekt logisch notwendige Vielheitsverhältnisse der Gegenstände, die in Absehung von den andern Bestimmungen, mit denen sie in der Wirklichkeit realidentisch sind, erfaßt werden.

II. Der Gegenstand.

1. Von den Indern und Griechen an bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts betrachtete man einmütig die Größe (Quantität) als den wesentlichen Gegenstand der Mathematik und unterschied die diskrete Zahlgröße und die stetige Raumgröße. Diese Auffassung ist in der Gegenwart verlassen. Die Definition der Mathematik als der Lehre von der Größe erscheint besonders im Hinblick auf die reine Zahllehre als viel zu eng[35]. Was ist aber dann Gegenstand der Mathematik? B. Peirce spricht ihr jeden speziellen, bestimmten Gegenstand ab und betrachtet sie als eine Methode, als „die Wissenschaft, welche notwendige Folgerungen zieht"; sie enthält nicht alle Wissenschaften in sich, aber sie beherrscht und regiert alle; selbst die Logik geht in sie ein[36]. Dedekind, Frege, Russell streben dahin, die Mathematik vollständig zu logisieren. Logik und Mathematik sind identisch, sagt Russell: „Die Logik ist die Jugend der Mathematik und die Mathematik ist das Mannesalter der Logik." Russell fragt dann: „Was ist der Gegenstand, den wir nach Belieben Mathematik oder Logik nennen können?"[37] Weit verbreitet ist die Meinung: der Begriff der Ordnung habe den Begriff der Größe entthront; die Mathematik sei die formale Wissenschaft von den geordneten Gegenständen; die Zahlen seien auf *ordinale* Eigenschaften zurückzuführen, und selbst das Kontinuum lasse sich auf eine rein ordinale Art definieren[38]. In der Tat „gibt es nichts, das der Zahl nicht unterworfen wäre. Die Zahl ist daher gewissermaßen eine metaphysische Grundgestalt, und die Arithmetik eine Art Statik des Universums, in der sich die Kräfte der Dinge enthüllen"[39].

Um in die bedeutsame und schwierige Frage nach dem Gegenstand der Mathematik einzudringen, ist der ur-

[35] H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft 50; E. Husserl, Logische Untersuchungen I³ 252 f. — B. Russell, a. a. O. 197 urteilt: „Quantität ist ein unklares Wort".

[36] Bei L. Couturat, a. a. O. 226 f.

[37] A. a. O. 196—198.

[38] L. Couturat, a. a. O. 104; A. Voß, Über das Wesen der Mathematik, Leipzig und Berlin 1908, 24—26 Anm.; Ders., Über die mathematische Erkenntnis, in: Kultur der Gegenwart Teil III Abt. I, Berlin und Leipzig 1914, 15—18.

[39] Leibniz, Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie I, Ausg. Buchenau-Cassirer, Meiners Philos. Bibl. 107, 30.

sprüngliche Sinn der Begriffe Größe und Zahl und ihr logischer Zusammenhang mit dem Seinsbegriff herauszustellen.

Das Seiende rein als solches — das auf dem Boden des erkenntnistheoretischen Realismus zu definieren ist als: das, was existieren kann — ist nicht ein von der Abstraktion zurückgelassenes ungeschiedenes Residuum, sondern, um nur die Eigentümlichkeiten herauszuheben, die hier von Bedeutung sind, eine innerlich geordnete Vieleinheit. Wesenheit und Dasein sind zwar nicht selbst Seiende oder konkrete Seinsteile, anderseits nicht Nichts noch ein Mittleres zwischen Sein und Nichts, sondern zwei innere, das Seiende konstituierende Bestandteile, die sich im geschaffenen Sein zur vieleinen Ganzheit des Seienden ergänzen[40]. Die Begriffe: Einheit, Vielheit, Ordnung sind somit dem Seienden als solchem innerlich, ja sogar dem verum und bonum logisch vorgeordnet. Damit sind aber zugleich die Begriffe der Größe und des Maßes gegeben, beide selbstverständlich noch nicht im Sinn der ausgedehnten Größe und Maßstrecke. Die Begriffe der Vielheit, des Größer- und Kleinerseins — worin Maßbestimmung liegt —, der Ganzheit und der von ihr beinhalteten Bestandteile sind also dem Seienden bzw. geschaffenen Seienden als solchem wesentlich und nicht voneinander zu trennen. Mithin ist der Begriff der Zahl, als der durch die Einheit gemessenen Vielheit, mit dem Seienden als solchem gegeben[41].

Welche Rücksicht am Seienden betrachtet nun die Mathematik? Nicht die dem Seienden ebenfalls immanente Wert- und Zweckbestimmtheit, und unter dem Gesichtspunkt der Ordnung nicht seine zweckbestimmte Ordnung, sondern die dem Seienden in seiner Vieleinheit wesentliche Größenordnung. Damit bestätigt sich die alte Auffassung, daß die Größe den wesentlichen Gegenstand der Mathematik bildet. Größe aber schließt Ordnung ein. Demnach macht nicht jedwede Ordnung den Gegenstand der Mathematik aus, sondern allein die Größenordnung. Weil aber die Begriffe: Einheit, Vielheit, Maß und Größe in alle Begriffe eindringen, ist ein der Mathematik übergeordnetes, selbständiges Gebiet begrifflicher Untersuchungen, das frei

---

[40] Vgl. Sein und Erkennen 92 f., 106—108.

[41] Die Alten unterschieden den numerus transcendentalis und praedicamentalis oder stricte quantitativus. — Das Zählen ist eine ursprüngliche Tätigkeit des unterscheidenden und zugleich einenden Verstandes, die schon in der Erfassung des abstrakt Seienden als solchen wirksam ist und an diesem ihre gegenständliche Norm hat.

von allen mathematischen Bestandteilen wäre, unmöglich. Darum ist die Mathematik im Verein mit der Logik und Metaphysik Fundament für alle echte Wissenschaft[42]. Die Mathematik ist ein Teil der Reallogik. Ihre Begriffe haben ontologische Bedeutung und Gültigkeit.

2. Bis ins 19. Jahrhundert bildeten die Zahlen mit dem Raum zusammen die beiden koordiniert gedachten Gebiete der Mathematik. Heute ist die Koordinationsstellung der Zahlenmannigfaltigkeit und der Raummannigfaltigkeit vielfach preisgegeben. Die Zahl hat eine fundamentale Bedeutung, der die Raummannigfaltigkeit eingeordnet wird. Schon durch Descartes war die Beherrschung der Geometrie durch die Arithmetik gelungen. Seitdem hat sich die arithmetische Analyse aller Gegenstände der Erscheinungswelt bewältigt, und die Geometrie ist immer mehr in die Sprache der Zahlenlehre übertragen worden. Infolgedessen erscheint die Geometrie vielen als eine auf logische Grundbegriffe reduzierte Disziplin; die logischen Grundbegriffe des Zuordnens, der Klasse usw. konstituieren den eigentlichen Inhalt der geometrischen Aussagen. Die geometrischen Axiome seien durch arithmetische Formeln erschöpfend formuliert; alles anschaulich Räumliche gilt als überflüssige Zutat[43].

Zweifelsohne kann die fundamentale, in alle, auch die geometrischen Begriffe eindringende Bedeutung des Zahlbegriffs nicht hoch genug eingeschätzt werden. „Die Natur der Zahl ist kenntnisspendend, führend und lehrend für jeglichen in jeglichem Ding, das ihm zweifelhaft oder unbekannt ist", heißt es in dem berühmten Philolaos-Fragment[44]. Doch handelt es sich in der Arithmetisierung der Mathematik nicht darum, den Raum mit Zahlen zu konstruieren, sondern nur darum, mittels der Zahlen eine Mannigfaltigkeit herzustellen, welche Grundeigenschaften des Raumes besitzt. Das Kontinuum der Zahlen und das Kontinuum des Raumes sind wesensverschieden. Im Kontinuum der Zahlen stehen die einzelnen Elemente isoliert nebeneinan-

---

[42] Deshalb sagt *Kant,* „daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist" (Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, Vorrede, Philos. Bibl. 48 b, 192 f.). Ähnlich *Husserl,* Logische Untersuchungen I 253. Nach *Hilbert* verfällt alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik.

[43] W. Burkamp, a. a. O. II 275; H. Reichenbach, a. a. O. 121.

[44] H. Diels, Die Fragmente der Vorsokratiker 32, 11.

der und bleiben isoliert, so eng auch die Zahlen durch fortgesetzte Teilung aneinanderrücken. Darum reichen Zahlenmannigfaltigkeiten allein nicht aus, das geometrische Raumkontinuum adäquat auszudrücken.

3. Die Frage, ob die Kardinal- oder die Ordinalzahl die logisch primäre sei, ist umstritten. Den Anlaß zur Meinungsverschiedenheit bildet aber recht oft ein verschiedener Zahlbegriff, der seinerseits auf ein tieferliegendes philosophisches Problem zurückweist. Die Zahl wird gefaßt entweder als Anzahl oder als Reihenglied bzw. Stellenzeichen. Manche, z. B. G. Frege, L. Couturat, B. Russell und zahlreiche Anhänger, betrachten die Anzahl von Elementen in einem Kollektivum, das als Ganzes gegeben ist und in dem die Ordnung der Elemente belanglos für diesen Anzahlbegriff ist, als das Primäre und die Ordnung in einer Reihe als etwas sekundär Hinzukommendes, von dem dieser Anzahlbegriff ganz unabhängig ist. Andere sagen: Wir können nur dann von einer begrifflich klaren Anzahl sprechen, wenn wir mindestens eines Prinzips sicher sind, die Menge in Zahlenordnung zu erschöpfen. Die Ordinalzahl ist die Bedingung für die Möglichkeit einer bestimmten Kardinalzahl. Die Reihung der Zahlen ist das Wesentliche. Darum treten die Zahlen primär als Ordinalzahlen auf und sind nur durch ihre Stellung in der Reihe gekennzeichnet[45].

Da die Anzahl durch die Ordinalzahl näher bestimmt wird, ist es begreiflich, wenn der Mathematiker, dessen Streben auf exakte Bestimmtheit geht, die Reihung der Zahlen als das (für die Mathematik) Wesentliche ansieht und die Ordinalzahl als das (für die Mathematik) Primäre betrachtet. Logisch aber schließt der Begriff der Ordinalzahl, der Reihe und der Stelle den der Anzahl ein, setzt

[45] W. Burkamp, a. a. O. II 218 f.; H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft 28, doch vgl. 29 Anm. 2; H. Helmholtz, Schriften zur Erkenntnistheorie, hrsg. von P. Hertz und M. Schlick, Berlin 1921, 73 f. — Von diesem Standpunkt aus betrachtet man die Zahlen 1, 2, 3, 4 ... oft lediglich als eine Reihe von lauter verschiedenen Zeichen, denen abgesehen von der Reihenfolge, in der sie angenommen worden sind, zunächst keine weitere Bedeutung zukommt. Zu einem dieser Zeichen „Eins addieren" soll dann gar nichts anderes heißen, als daß man von dem betreffenden Zeichen zu dem in der Reihe nächstfolgenden übergeht. Wenn die Reihung als das Wesentliche der Zahl angesehen wird, wird sie oft auch als freies Erzeugnis des menschlichen Geistes betrachtet, wie von H. Weyl, a. a. O. 19, und R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?[3], Braunschweig 1911, VII f. Nach Gauß ist die Zahl „bloß unsers Geistes Produkt" (Brief an Bessel vom 9. 4. 1830, Werke 8, 201).

ihn also voraus, wie die Bildungsweise der Namen dies richtig ausdrückt[46]. Die Ordinalzahl antwortet auf die Frage: der wievielte in der Anzahl? Sie enthält also, ebenso wie der Begriff der Reihe und der Stelle, ein *neues* zu dem Anzahlbegriff *hinzukommendes* Anordnungselement. Anderseits ist der Ordnungsbegriff auch dem Anzahlbegriff immanent, wie er schon dem Seinsbegriff innewohnt.

Die Prinzipien der Zahlen sind zugleich Prinzipien der Dinge, sagten schon die Pythagoreer. Mathematischer Gehalt ist rationaler Seinsgehalt. Auch in der Mathematik zeigen sich Kraft und Grenze des apriorischen Erkennens; seine Kraft, die tief eindringt in die rationale Größenordnung dieser Welt und aller möglichen Welten; seine Grenze, da die ratio sich nur an einem ihr gegebenen Stoff betätigen kann und auch in der Ergründung der rationalen Größensachverhalte immer wieder neue Ziele sieht[47].

---

[46] Vgl. E. Husserl, Philosophie der Arithmetik I, Halle 1891, 4 f.

[47] Ein weiterer Beitrag wird den *philosophischen Sinn der mathematisch-logistischen Symbolsprache* behandeln, die in Mathematik und Logik eine hohe Bedeutung hat und große und wachsende Anwendung findet.