Die Modalität einfacher Aussageverbindungen.

Von Walter Brugger S. J.

Im vergangenen Jahrzehnt haben sich die Logiker verschiedentlich mit den Fragen der Modalitätslogik beschäftigt[1]. Es handelte sich vor allem darum, den Sinn der verschiedenen Modalitäten und ihre Beziehungen untereinander und zur Aussagenlogik klarzustellen. Eine Untersuchung über die Frage, welche Modalitäten sich für Aussageverbindungen ergeben unter Zugrundelegung bestimmter Modalitäten der Elementarsätze, ist mir bisher nicht zu Gesicht gekommen. Diese Frage soll hier behandelt werden. Der Nutzen einer solchen Arbeit liegt in zwei Richtungen: erstens beleuchtet, berichtigt und erweitert sie ein Kapitel der traditionellen Logik; zweitens vermittelt sie eine weitere Kenntnisnahme einiger Grundbegriffe der umstrittenen Logistik. Umstritten ist allerdings weniger sie selbst als ihr philosophischer Sinn und ihre Anwendung auf philosophische Probleme. Die in dieser Untersuchung zu stellende Frage hätte jedenfalls ohne wenigstens beschränkte Verwendung der logistischen Zeichensprache in ihrem ganzen Umfang kaum beantwortet werden können[2].

I. Vorbegriffe.

Von Modalität ist im folgenden im aristotelischen Sinne die Rede. Nach Aristoteles ist Modalität die zuletzt im *Gegenstand* begründete Weise der Verknüpfung von Subjekt und Prädikat. Es kommen als Modalitäten in Frage: möglich, unmöglich, notwendig und kontingent. Nicht berücksichtigt werden hingegen jene Aussageweisen, die sich aus der Beziehung der Aussage auf das subjektive Fürwahrhalten oder den Grad der Ver-

---

[1] J. Lukasiewicz, Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagekalküls: Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 23 (1930) Cl. III, 51—77. — O. Becker, Zur Logik der Modalitäten: Jahrb. f. Philos. u. phänomenol. Forschg. 2 (1930) 496—548. — Vgl. ferner Implication, modality and intension in symbolic logic: Monist 43 (1933) 119—153. — F. Fitch, Modal Functions in two-valued logic: Journal for Symbolic Logic 2 (1937) 125—128. — L. O. Kattsoff, Modality and Probability: Philos. Review 46 (1937) 78—85. — H. B. Smith, Modal Logic. A revision. 1937 (in: Philosophy of Science). — Vgl. auch Anm. 3 und 4.

[2] Über die philosophische Bedeutung und die Anwendungsmöglichkeit der Logistik auf inhaltliche Fragen der Philosophie wird hier nicht geurteilt. Vgl. zu diesen Fragen: C. Nink S. J., Die mathematisch-logistische Symbolsprache in philosophischer Sicht: Schol 15 (1940) 57—62; J. de Vries S. J., Logistische Zeichensprache und Philosophie: Schol 16 (1941) 367—379; ferner unsere Besprechung von H. Scholz, Metaphysik als strenge Wissenschaft: Schol 17 (1942) 95—98.

knüpfung mit anderen Erkenntnisinhalten ergeben (Gewißheit und Wahrscheinlichkeit in ihren verschiedenen Graden; Fraglichkeit und Beweisbarkeit). Ebenso bleibt außer Betracht die gewöhnlich als Qualität bezeichnete Aussageweise (Bejahung und Verneinung)[3]. Hingegen soll nicht ausgeschlossen sein jene Aussageweise, die sich aus der objektiven Verknüpfung mehrerer Inhalte ergibt. So kann z. B. nach der Modalität von a + b gefragt werden unter der Voraussetzung bestimmter Modalitäten für a bzw. b.

Mit Vorbedacht wurde die aristotelische Modalität als eine „*zuletzt* im Gegenstand begründete Verknüpfung von Subjekt und Prädikat" gekennzeichnet. Denn unmittelbar gründet die Modalität nur dort im Gegenstand, wo dieser selbst als Subjekt einer Aussage auftritt. Wo hingegen Aussagen zum Subjekt neuer Aussagen werden, ist dies nur noch mittelbar so. Wenn p und q Aussagen sind, so kann von ihnen z. B. ausgesagt werden, daß sie beide zusammen wahr sind. Die Modalität dieser neuen Aussage hängt nicht mehr bloß von den p und q entsprechenden Gegenständen, sondern auch von der Natur der logischen Konjunktion ab.

Wenn hier von aristotelischen Modalitäten gesprochen wird, bedarf das noch einer genaueren Festsetzung. Der Sprachgebrauch für „möglich" und „kontingent" ist in den aristotelischen Schriften schwankend[4]. Beide Ausdrücke werden hier so genommen, wie weiter unten festgelegt wird.

Die Modalität betrifft die Kopula. Jene Bestandteile, die nicht unmittelbar durch die Kopula verbunden werden, haben auf sie keinen bestimmenden Einfluß. „Veritas propositionis non variatur per necessitatem et contingentiam, ex eo quod materialiter in locutione ponitur: sed solum ex principali compositione in qua fundatur veritas propositionis, unde eadem ratio necessitatis et contingentiae est in utraque istarum: ego cogito hominem esse animal, et: ego cogito Petrum currere"[5].

Es sind zu unterscheiden: Aussage, Urteil und Satz. Unter A u s s a g e soll ein Inhalt verstanden werden, der wahr oder falsch sein kann. Die Aussage ist das, worüber geurteilt wird oder geurteilt werden kann, ohne die Stellungnahme zu dessen Wahrheit oder Falschheit. Das *Urteil* sei dann die Aussage, insofern sie behauptet wird, und *Satz* der sprachliche Ausdruck der Aussage.

---

[3] Vgl. R. F e y s , Les logiques nouvelles des modalités: RevNéoscolPh 40 (1937) 517—518.

[4] Vgl. A. B e c k e r , Die aristotelische Theorie der Möglichkeitsschlüsse, Berlin 1933; J. M. B o c h e n s k i , Notes historiques sur les propositions modales: RevScPhTh 26 (1937) 673 ff.; ferner A. F a u s t , Der Möglichkeitsgedanke I, Heidelberg 1931.

[5] Thomas v. Aq., De Ver. q. 2 a. 12 ad 7.

Bei *zusammengesetzten* Aussagen kann man nicht von einer eigenen, das Ganze betreffenden Modalität sprechen. Denn zusammengesetzte Aussagen sind sprachlich zwar *ein* Satz, logisch aber mehrere Aussagen. Entweder werden über ein Subjekt mehrere Aussagen gemacht, oder es wird über mehrere Subjekte, insofern sie viele sind, also nicht sofern sie eine Einheit bilden, dasselbe ausgesagt, oder es werden über mehrere Subjekte mehrere Aussagen gemacht. In allen diesen Fällen handelt es sich also um eine logische Vielheit von Aussagen, über deren Verbindung oder Verhältnis nichts weiteres ausgesagt wird.

Anders sind die Aussageverbindungen geartet. Dort wird eine bestimmte Art der Verbindung zwischen den Aussagen behauptet. Bei den zusammengesetzten Aussagen wird jede Teilaussage für sich behauptet und ist bloß für sich wahr oder falsch. Bei den Aussageverbindungen hingegen werden nicht die Einzelaussagen, wenigstens nicht unmittelbar und nicht notwendig, sondern nur ihre bestimmte Art der Verbindung behauptet. Sprachlich tritt der Unterschied nicht immer klar hervor. So kann der Satz: „Fritz und Wilhelm stehen im Felde" ein zusammengesetzter Satz oder eine Satzverbindung sein, je nachdem ob der Nachdruck auf den einzelnen Namen oder auf dem verbindenden „und" liegt. Angenommen, Fritz stehe nicht im Felde, so ist im ersten Falle der Satz teilweise wahr, teilweise falsch, im zweiten Falle hingegen schlechthin falsch.

Über Aussageverbindungen handelt die traditionelle Logik unter dem Titel „Hypothetische Urteile". Sie werden dort definiert als „Urteile, deren Gegenstand die Verbindung mehrerer Urteile ist". Der Titel „Hypothetische Urteile" und die angegebene Definition stimmen aber schlecht zueinander, sofern man, wie das Wort doch andeutet, unter hypothetischem Urteil einen Konditionalsatz oder ein Gefüge von Konditionalsätzen versteht. Als hypothetische Sätze werden gewöhnlich aufgezählt: der Konditionalsatz, der eigentliche und der uneigentliche Disjunktivsatz und der Konjunktivsatz. Von diesen Sätzen ist der uneigentliche Disjunktivsatz sicher kein hypothetischer Satz, d. h. kein Gefüge von Konditionalsätzen. Dennoch ist er ein Urteil, dessen Gegenstand die Verbindung mehrerer Urteile ist. Solche Aussagen würde man besser mit dem allgemeinen Namen ‚Aussageverbindungen' benennen. *Aussageverbindungen* seien also Aussagen über die Verbindung mehrerer Aussagen. *Einfache* Aussageverbindungen seien Aussagen über die Verbindung von nur zwei Aussagen. Die hypothetischen Aussagen sind demnach eine Unterart der Ausageverbindungen. Aussageverbindungen sind an sich mit keinen Modalitätsbestimmungen versehen. Die hypothetischen Aussagen hingegen tragen alle die Modalität der Notwendigkeit. Dennoch sind nicht alle notwendigen Aussageverbindungen auch hypothetische Aussagen.

Aussageverbindungen sind als Aussagen entweder wahr oder falsch. Bei gegebener Art der Aussageverbindung hängt die Wahrheit oder Falschheit entweder von der Form der Aussageverbindung oder von der Wahrheit bzw. Falschheit der verbundenen Aussagen ab. Wahrheit oder Falschheit einer Ausage sollen hinfort ihre „Wahrheitswerte“ heißen.

p und q seien Zeichen für beliebige, aber subjektverschiedene Aussagen. Ein Ausdruck, in dem p oder q vorkommt, heiße eine *Funktion*. Eine einfache Aussageverbindung ist also eine Funktion von p und q oder eine Satzfunktion. Jene Satzfunktionen, deren Wahrheitswert nur vom Wahrheitswert von p und q abhängt, sollen W a h r h e i t s f u n k t i o n e n heißen. Da die Wahrheitsfunktionen von ihren Elementen abhängen, haben sie keine eigene, von diesen unabhängige Modalität. Die gesetzmäßige Abhängigkeit ihrer Modalität von der Modalität der Elemente aufzuweisen, ist gerade das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Wieviele Wahrheitsfunktionen möglich sind, ist nicht dem Raten anheimgegeben, sondern läßt sich aus dem Obigen errechnen. Der Wert „wahr“ werde durch die Ziffer 1 bezeichnet, der Wert „falsch“ durch die Ziffer 0. (Die beiden Ziffern haben in diesem Zusammenhang keine arithmetische Bedeutung.)

Bei Funktionen mit nur einer Variablen p sind nur zwei Wahrheitsfunktionen möglich, die eine mit dem Wert „wahr“, wenn p wahr ist, und „falsch“, wenn p falsch ist; die andere mit dem Wert „wahr“, wenn p falsch ist, und „falsch“, wenn p wahr ist. p selbst kann nur die Werte 1 oder 0 haben. Für die beiden Funktionen von p gilt dann entweder die Entsprechung (1, wenn p 1 ist, und 0, wenn p 0 ist), oder die Umkehrung (1, wenn p 0 ist, und 0, wenn p 1 ist). Die Entsprechung ergibt in ihrem Sinn die Funktion der Bejahung, die Umkehrung der Werte die Funktion der Verneinung. Die Bejahung von p werde p geschrieben, die Verneinung -p[6].

[6] Der Verf. hätte sich bei der Auswahl der Zeichen am liebsten einer der bestehenden Schreibweisen angeschlossen. Drucktechnische Gründe geboten aber die Beschränkung auf Buchstaben, Ziffern und sonst gebräuchliche Zeichen. Die Wahl der Schreibweise des Lukasiewicz, die sich unter dieser Rücksicht empfahl, verbot sich durch die Schwierigkeiten, die sie dem Leser bietet. —| Es werden hier nur jene Zeichen eingeführt, die unmittelbar dem Verständnis der Untersuchung dienen, und zwar jeweils an dem Ort, wo sie erstmals verwandt werden.

Eine Funktion mit zwei Variablen p und q hängt nicht bloß vom Wahrheitswert der Variablen selbst, sondern auch von ihren Kombinationen ab. Diese sind an Zahl $2^2 = 4$ und lauten:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0

Wenn nun eine Funktion mit den beiden Variablen p und q *die* Form hat, daß sie dann und nur dann wahr ist, oder den Wert 1 hat, wenn sowohl p als q den Wert 1 haben, dann läßt sich diese Form der Funktion eindeutig durch die vollständige Aufzählung der Wahrheitswerte bei den verschiedenen Kombinationen der Werte von p und q bestimmen. Es ergeben sich im angeführten Beispiel die Werte 1, 0, 0, 0, deren Richtigkeit sich an folgendem Schema ablesen läßt:

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
	1	0	0	0

d. h. die so beschriebene Funktion ist wahr, wenn p und q beide zusammen den Wert 1 besitzen, aber immer falsch, wenn eine von beiden, oder beide zusammen den Wert 0 haben. Die so beschriebene Funktion soll *Konjunktion* heißen und mit + bezeichnet werden. Es soll folgende Definition gelten:

$$\text{Def } p + q = (1000)pq$$

d. h. die Konjunktion p + q soll auch durch Angabe ihrer kennzeichnenden Werte, die in eine Klammer gesetzt werden, geschrieben werden dürfen. Wir können also schreiben p + q oder (1000)pq.

Auf ähnliche Weise lassen sich nun auch die übrigen Funktionen von p und q feststellen. Es werden deren so viele zu erwarten sein, als es Kombinationen gibt zwischen den Funktionswerten 1 und 0 und den Wertkombinationen von p und q, also $4^2 = 16$. Sie lauten in einer Tabelle angeordnet:

p q																
1 1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
1 0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0 1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
0 0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0

Von den so gekennzeichneten Funktionen sind *nicht alle* Wahrheitsfunktionen. Als solche scheiden aus die erste und die letzte, also (1111) und (0000). Das Kennzeichnende dieser Funktionen ist, daß sie *nicht* von den Wahrheitswerten p und q oder deren Kombinationen abhängen. Die Funktion (1111)pq ist immer wahr, die Funktion (0000)pq immer falsch, mögen die Werte von p und q und deren Kombinationen sein, welche sie wollen. Das heißt aber: die Funktion (1111)pq und die Funktion (0000)pq sind wahr bzw. falsch bloß auf Grund ihrer

Form. Eine Funktion, die bloß auf Grund ihrer Form, unabhängig von jedem Inhalt (hier: p und q), wahr ist, nennt man ein *logisches Gesetz.* Eine Funktion hingegeen, die bloß auf Grund ihrer Form falsch ist, ist ein *Widerspruch* von der Form p + -p, oder läßt sich auf einen solchen zurückführen.

Diese beiden Funktionsarten scheiden aus unserer weiteren Betrachtung aus. Die Modalität beider ist eindeutig durch ihre Form gegeben. Sie kann nur die der Notwendigkeit sein. Logische Gesetze sind notwendig wahr, logische Widersprüche notwendig falsch.

Im folgenden haben wir es nur noch mit den Wahrheitsfunktionen von p und q zu tun. Ihre Anzahl beträgt demnach 16—2=14. Bevor wir die Antwort auf unsere Frage nach der Abhängigkeit ihrer Modalität von der ihrer Elemente geben können, haben wir die Form dieser Funktionen im Einzelnen festzustellen.

Zur leichteren Übersicht teilen wir die Funktionen in *mehrere Gruppen.* Die *erste Gruppe* wird gebildet durch jene Funktionen, bei denen für die verschiedenen Kombinationen der Werte von p und q nur einmal der Wert 1 auftritt: (1000), (0100), (0010), (0001). Wir haben hier jedesmal die schon behandelte *Konjunktion* vor uns, nur mit je verschiedenen Vorzeichen von p oder q. Sie können alle in derselben Form definiert werden:

Def (1000)pq = p + q (zu lesen: sowohl p als q)
Def (0100)pq = p + q
Def (0010)pq = -p + q
Def (0001)pq = -p + -q

Die *zweite Gruppe* umfaßt jene Funktionen, bei denen der Wert 0 nur einmal für je eine der verschiedenen Wertekombinationen von p und q auftritt. Es sind die Funktionen: (1110), (0111), (1011), (1101). Obwohl sich alle vier, ähnlich wie die vorige Gruppe, auf eine Grundfunktion zurückführen lassen, erhalten zwei von ihnen wegen ihrer besonderen logischen Wichtigkeit ein besonderes Zeichen.

Die Funktion (1110) ist dadurch gekennzeichnet, daß sie immer wahr ist, außer wenn sowohl p als q falsch sind. Es gilt also p oder q oder beide zusammen.

Def (1110)pq = p v q (zu lesen: p oder q).

Wir nennen diese Funktion die *kleine Alternative.* Sie entspricht der uneigentlichen Disjunktion der traditionellen Logik. (0111) ist dieselbe Funktion mit negativen Elementen. Sie ist immer wahr, wenn p oder q oder beide zusammen falsch sind.

Def (0111)pq = -p v -q

Def p/q = -p v -q (zu lesen: p und q schließen sich aus).

Diese Funktion heiße die *Ausschließung.* Sie steht der konjunktiven Aussage der herkömmlichen Logik nahe.

Die wichtigste Wahrheitsfunktion ist (1011). Sie ist immer wahr außer in dem Fall, wo p wahr und q falsch ist. Wenn wir uns das Schema der Kombinationen von p und q vergegenwärtigen,

p	p	-p	-p
q	-q	q	-q
1	0	1	1

können wir sagen, sie ist immer wahr, wenn p falsch und immer wahr, wenn q wahr ist. Auf die kleine Alternative zurückgeführt heißt das: -p v q.

Def (1011)pq = -p v q

Def p F q = -p v q (zu lesen: wenn p, dann q; oder: p impliziert q).

Wir nennen diese Funktion die *Implikation.* Erfahrungsgemäß macht ihr Verständnis gewisse Schwierigkeiten. Sie wird leicht mit der notwendigen oder inhaltlichen Folge, oder mit dem gewöhnlichen Bedingungssatz verwechselt. In der bloßen (oder materiellen) Implikation brauchen aber p und q inhaltlich nichts miteinader zu tun haben. Auf Grund der Implikation folgt nicht q *aus* p. Der Satz: „Wenn zweimal zwei vier sind, geht Petrus spazieren" ist eine echte Implikation, aber falsch, sooft Petrus nicht spazieren geht. Auch wenn eine inhaltliche Beziehung da ist, muß kein notwendiger Zusammenhang herrschen zwischen p und q. Als Beispiel diene der Satz: „Wenn es regnet, werden die Leute naß", was nur unter gewissen Voraussetzungen zutrifft. Der Unterschied der materiellen Implikation vom Konditionalsatz geht schon daraus hervor, daß der echte Konditionalsatz notwendig ist, während die materielle Implikation als Wahrheitsfunktion von jeder Modalität abstrahiert, also von sich aus verschiedener Modalitäten fähig ist. Die Ausdrücke „Wenn . . dann" und „impliziert" haben also in der materiellen Implikation einen anderen Sinn als im gewöhnlichen Konditionalsatz: es fehlt die Notwendigkeit. Der Ausdruck „folgt" hingegen soll hier immer der notwendigen Implikation vorbehalten bleiben. Gemeint ist bei der Implikation das und nur das, was die Definition angibt.

Implikation und Bedingungssatz sind sich, wie aus dem Gesagten hervorgeht, also durchaus nicht fremd. Die Implikation

---

[7] Vgl. die treffenden Bemerkungen von J. M. Bochenski: Nove lezioni di logica simbolica, 39.

ist sozusagen die Materie zum Bedingungssatz. Man nennt sie deshalb auch materielle Implikation. Beide sind wesentlich verschieden, stehen aber doch in Analogie zueinander. Leider wird diese Verschiedenheit von vielen Logistikern übersehen[7]. Die Bedeutung der materiellen Implikation liegt in der Rolle, die sie im systematischen Aufbau der Logistik spielt.

In einem ähnlichen Verhältnis wie die materielle Implikation und der Konditionalsatz stehen die große Alternative und die eigentliche Disjunktion, und auch die Ausschließung und die Konjunktivaussage der traditionellen Logik zueinander.

(1101) ist die *Implikation* negativer Sätze. Sie ist immer wahr, außer wenn -p und q zutrifft, oder immer wahr, wenn p wahr oder q falsch ist.

Def (1101)pq = p v -q
Def -p F -q = p v -q

Die *dritte Gruppe* umfaßt jene Funktionen, bei denen der Wert 1 zweimal auftritt. Das trifft 6 mal zu, 4 mal unsymmetrisch [(1100), (0011), (1010), (0101)] und 2 mal symmetrisch [(1001), (0110)].

Wenden wir uns zunächst zu den Funktionen, deren Werte 1 unsymetrisch angeordnet sind. An Hand des Schemas

p	p	-p	-p
q	-q	q	-q
1	1	0	0
1	0	1	0

läßt sich leicht feststellen, daß jeweils entweder p oder q oder -p oder -q bevorzugt sind, daß also

(1100) pq wahr ist, wenn wenigstens p wahr ist,
(0011) pq wahr ist, wenn wenigstens -p wahr ist,
(1010) pq wahr ist, wenn wenigstens q wahr ist,
(0101) pq wahr ist, wenn wenigstens -q wahr ist,

gleichviel wie es um den Wert der andern Aussage steht. Man kann diese Funktion die *Minimalaussage* nennen. Von der kleinen Alternative unterscheidet sie sich dadurch, daß das, was wenigstens wahr ist, nicht unbestimmt gelassen wird.

Def (1100)pq = p + (q v -q)
Def W$p\bar{q}$ = p + (q v - q) (zu lesen: was immer mit q sei, wenigstens p ist wahr.)
Def (0011) pq = -p + (q v -q)
Def W-$p\bar{q}$ = -p + (q v -q)
Def (1010)pq = q + (p v -p)
Def W$q\bar{p}$ = q + (p v -p)
Def (0101)pq = -q + (p v -p)
Def W-$q\bar{p}$ = -q + (p v -p)

Es bleiben die beiden Funktionen (0110) und (1001), deren Werte symmetrisch angeordnet sind. (0110) ist die Funktion, der strengen oder *großen Alternative*. Sie ist immer und nur dann wahr, wenn die Werte von p und q einander entgegengesetzt sind. Sie ist das Analogon zur eigentlichen Disjunktion der traditionellen Logik.

Def (0110)pq = (p F -q) + (q F -p)
Def p V q = (p F -q) + (q F -p) (zu lesen: entweder p oder q).

Die Funktion (1001) ist immer und nur dann wahr, wenn p und q gleichwertig, also zusammen wahr oder zusammen falsch sind. Sie heißt *Äquivalenz*.

Def (1001)pq = (p F q) + (q F p)
Def p H q = (p F q) + (q F p) (zu lesen: p ist äquivalent mit q).

II. Ausführung.

Die *aristotelischen Modalitäten* werden im folgenden durch die Buchstaben M, U, N, K bezeichnet. M steht für Möglichkeit oder möglich, U für Unmöglichkeit oder unmöglich, N für Notwendigkeit oder notwendig und K für Kontingenz oder kontingent. Sie bezeichnen Funktionen, die sowohl p und q für sich als auch deren Funktionen betreffen können.

Möglichkeit wird hier, soweit es sich um einfache, gegenstands-unmittelbare Aussagen handelt, im Sinn der absoluten Möglichkeit oder der inneren Widerspruchsfreiheit genommen. Bei den Aussageverbindungen stellt sich die Möglichkeit sinngemäß als durch die Natur der Verbindung mitbedingt dar. Bei Zugrundelegung der relativen Möglichkeit (sei es physische oder moralische M, Beweisbarkeit oder irgend eine andere) ist nicht ohne weiteres ersichtlich, daß die Ergebnisse dieser Untersuchung analoge Gültigkeit behalten. So ist z. B. der Satz p + M-p möglicherweise wahr, wenn M als absolute M genommen wird (in sensu diviso), aber unmöglich wahr, wenn M relativ zur Wahrheit von p genommen wird (in sensu composito). Denn unter der Voraussetzung, daß p wahr ist, ist es unmöglich, daß p nicht wahr ist.

Wenn der Sinn von M als bekannt vorausgesetzt wird, lassen sich für die andern Modalitäten folgende *Definitionen* aufstellen:

Def Up = -Mp
Def Np = -M-p
Def Kp = Mp + M-p

Kp wird manchmal auch definiert: M-p. Man kann das gewiß tun. Nur muß man dann eine doppelte Kontingenz unterscheiden, eine bei der K^1p = -Np = M-p, und eine bei der K^2p = Mp + M-p. Wir ziehen die obige Definition vor, weil die Implikationsverhältnisse der Modalitäten dabei klarer zum Ausdruck kommen. Wir unterscheiden also

Mp
M-p : einseitige Möglichkeit

Mp + M-p = Kp: beiderseitige Möglichkeit oder Kontingenz

Mp v M-p = ?: disjunktive Möglichk. od. Unentscheidbarkeit.

Die Notwendigkeit impliziert wohl Mp, aber nicht Kp, die Unmöglichkeit wohl M-p, aber nicht Kp. Ferner ist zu unterscheiden: das bloß Mögliche, das kontingent Zutreffende und die Kontingenz selbst; also:

-p + Mp   p + M-p   Mp + M-p

Der Unterschied von M und K werde noch durch folgende Äquivalenzen näher bezeichnet: (die dem Zeichen H oder einem anderen Funktionszeichen beigegebenen Punkte dienen der stärkeren Abhebung von den Variablen, auf die sich das Zeichen bezieht)

Mp .H. -Up [M steht nur im Gegensatz zu U]
Kp .H. -Up + (-Np) [K steht im Gegensatz zu U und N]
Mp :H: Mp + (-M-p) .V. Mp + M-p
Mp .H. Np V Kp
Kp .H. Mp + (-Np)

Die verschiedenen Modalitäten implizieren sich, wie folgt:

Np .F. p .F. Mp
Up .F. -p .F. M-p
-p + Mp .F. Kp
p + M-p .F. Kp

Für die Modalität verneinter Ausdrücke gilt folgende Beziehung: hat eine Aussage eine beliebige Modalität S, so hat die verneinte Aussage dieselbe Modalität ihrer (doppelten) Verneinung und umgekehrt, d. h.

Sp .H. S -(-p)

Diese Beziehung heiße die Regel der Modalität verneinter Ausssagen. Zur Umwandlung der Modalität von Verneinungen in einfache Modalitäten dienen folgende Äquivalenzen:

N -p .H. Up
U -p .H. Np
K -p .H. Kp

Für M -p gibt es keine Äquivalenz: M -p .-H. Mp

Die *Frage* lautet nun, ob sich aus den verschiedenen Modalitätswerten von p und q und deren Kombinationen auch für die verschiedenen Wahrheitsfunktionen von p und q eindeutig verschiedene Modalitätswerte ergeben und welche. Diese Frage hat einen doppelten Sinn, je nachdem ob in der zu modifizierenden Wahrheitsfunktion die Modalität von p und q beibehalten werden soll oder nicht. Die Funktion M(Mp + Mq) ist offenbar eine andere als die Funktion M(p + q). Im ersten Fall handelt es sich um ein mögliches Zugleichsein von Möglichkeiten, im zweiten um die Möglichkeit des Zugleichseins selbst. Im ersten Fall haben wir eine Funktion von Modalitäten. Solche Funktionen sind immer notwendig wahr oder notwendig falsch, da das Verhältnis der Modalitäten untereinander notwendig ist. Die Frage in diesem Sinne scheidet also aus unserer Untersuchung aus. Die vorausgesetzte Modalität der Aussagen soll daher im folgenden nicht in die Aussagefunktion hineingenommen werden. Wenn X eine beliebige Wahrheitsfunktion ist, wird gefragt, welche Modalität dem Ausdruck p X q zuzuerteilen ist unter Voraussetzung der verschiedenen Modalitäten von p und von q. S, T, Z seien Modalitäten. Wenn gegeben ist: Sp, Tq, wird gesucht: Z(p X q).

Von größter Wichtigkeit für die Entscheidung dieser Frage ist es, daß die Modalitäten *keine Wahrheitsfunktionen* sind. Die Modalität einer Aussage oder Aussageverbindung hängt nicht von der Wahrheit oder Falschheit der Aussagen ab. So kann Mp sein, gleichviel ob der Wert von p gleich 1 oder 0 ist. Die Beantwortung unserer Frage wird demnach nur durch die Besinnung auf die Wesensart der betreffenden Aussageverbindungen und ihrer Modalitäten möglich sein.

In den folgenden Diagrammen enthält die erste (senkrechte) Spalte die voraussetzenden Modalitäten von p, die erste (wagrechte) Zeile die vorauszusetzenden Modalitäten von q. Die übrigen Felder zeigen die Modalitäten an, die sich für die in der Überschrift des Diagramms bezeichnete Funktion ergeben.

Erinnert sei noch einmal, daß p und q hier Zeichen sein sollen für Aussagen, die dem Begriff und der Sache nach weder subjektidentisch noch mit subjektidentischen Aussagen äquivalent sind. So sind z. B. die Sätze „A ist der Vater des C“ und „B ist der Vater des C“ subjektverschieden, aber äquivalent mit den subjektidentischen Sätzen „C hat den A zum Vater“ und „C hat den B zum Vater“. Die folgenden Diagramme und Regeln beziehen sich nur auf Sätze, die in diesem Sinne subjektverschieden sind.

Die Modalität N sagt, daß nur der Wert 1, die Modalität U, daß nur der Wert 0, die Modalität K, daß sowohl 1 als 0 auftreten kann. M sagt nur, daß 1 auftreten kann; M- sagt nur, daß 0 auftreten kann. Die Formeln stellen Gesetze dar, keine bloßen

Wahrheitsfunktionen. Dem Operator F ist deshalb ein N beigefügt: NF.

Wir wir gesehen haben, verwirklichen nicht alle Wahrheitsfunktionen einen neuen Funktionstyp. Manche von ihnen lassen sich in einer Gruppe zusammenfassen, deren Glieder sich nur durch die verschiedenen Vorzeichen von p oder q unterscheiden. Wir untersuchen deshalb nur sieben Funktionen, nämlich die Konjunktion [als ihren Vertreter: (1000)] die kleine Alternative, die Ausschließung, die Implikation [als ihren Vertreter (1011)], die große Alternative und die Äquivalenz.

a) Die Konjunktion: p + q

q=	N	*M*	K	U
p=N	N	*M*	K	U
M	*M*	*M*	K	U
K	K	K	K	U
U	U	U	U	U

Regeln der Konjunktion:

1. Für p + q ergibt sich immer U, sobald p oder q unmöglich ist. Im Diagramm: Das U-Eck der U-Spalte und U-Zeile.
   Up v Uq .NF. U(p + q)

2. Wenn hingegen sowohl p als q notwendig sind, dann ist auch p + q notwendig. Im Diagramm: N in der Vierung der N-Spalte und N-Zeile.
   Np + Nq .NF. N (p + q)

3. Sobald ein Teil möglich ist, ohne daß der andere Teil unmöglich oder kontingent ist, ist auch p + q möglich. Im Diagramm das M-Eck der M-Spalte und M-Zeile.

Um die distributive Anwendung von Modalitäten auf Funktionsglieder deutlich zu machen, führen wir eine neue Schreibweise ein. Wenn p X q jede beliebige Wahrheitsfunktion zweier Variablen bezeichnet und S, T die Modalitäten, die mit p und q in beliebiger Kombination zu verbinden sind, -Y, -Z aber diejenigen Modalitäten, die nicht mit p oder q zu verbinden sind, dann soll das wiedergegeben werden mit dem Ausdruck: [ST + (-Y, -Z)] (p X q). Wenn wir nur den einen Fall bezeichnen oder ausschließen wollen, wo sowohl p als q dieselbe Modalität haben, werde das Modalitätszeichen mit einer hochgestellten ^{2} versehen; z. B. S^2, $-Y^2$.

Wir können jetzt die 3. Regel der Konjunktion schreiben:

[M + (-U-K)] (p v q) .NF. M(p + q)

oder: [MN + ($-N^2$)] p v q) .NF. M(p + q)

4. Sobald wenigstens ein Teil kontingent ist, ohne daß der andere Teil unmöglich ist, ist p + q kontingent. Im Diagramm: das K-Eck der K-Spalte und K-Zeile.

[K + (-U)] (p v q) .NF. K(p + q)

5. Wenn wir jene Modalität, die der Wahrheit am günstigsten ist, als die „beste" bezeichnen und jene, die der Wahrheit am ungünstigsten ist, als die „schlechteste", lassen sich die Modalitäten von der „besten" zur „schlechtesten" anordnen: N M K U. Dies vorausgesetzt können wir die Regeln der Konjunktion in die eine Regel zusammenfassen: Die Konjunktion folgt immer der „schlechtesten" Modalität von p oder q.

Bemerkungen: 1. Bei *subjektidentischen* oder diesen äquivalenten Aussagen müßte im Diagramm bei MM (im zweiten Feld der M-Zeile) statt M ein Fragezeichen ? stehen, da aus der Möglichkeit zweier Subjektbestimmungen für sich allein nicht auf die Möglichkeit des Zusammenseins im selben Subjekt geschlossen werden kann. Peter kann z. B. nicht zugleich sitzen und gehen, obwohl beides für sich allein möglich ist. Hingegen kann zugleich Peter sitzen und Paul gehen. — Auch MK, KM und KK sind bei subjektidentischen Aussagen auf Grund der bloßen Form unentscheidbar.

2. Die zweite Regel, die analog auch für n Elemente gelten würde, zeigt an, daß alle notwendigen Sätze einem gemeinsamen, geschlossenen Feld der Notwendigkeit angehören.

b) Die kleine Alternative: p v q

q=	N	M	K	U
p=N	N	N	N	N
M	N	M	M	M
K	N	M	K	K
U	N	M	K	U

Regeln der kleinen Alternative:

1. p v q ist notwendig, wenn p oder q notwendig ist. Im Diagramm: das N-Eck in der N-Spalte und N-Zeile.

Np v Nq .NF. N(p v q)

2. Wenn sowohl p als q unmöglich sind, ist auch p v q unmöglich. Im Diagramm: U in der Vierung der U-Spalte und U-Zeile.

Up + Uq .NF. U(p v q)

3. Wenn p oder q möglich ist, ohne daß der andere Teil notwendig ist, ist p v q möglich. Im Diagramm: das M-Eck der M-Spalte und M-Zeile.

[M +(-N)] (p v q) .NF. M(p v q)

4. Wenn der eine Teil kontingent und der andere Teil auch kontingent oder unmöglich ist, dann ist p v q kontingent. Im Diagramm: das K-Eck der K-Spalte und K-Zeile.

[KU + (-U²)] (p + q) .NF. K(p v q)

5. Die Regeln der kleinen Alternative lassen sich ähnlich wie die der Konjunktion zusammenfassen in die eine Regel: die kleine Alternative folgt immer der „besten" Modalität von p oder q.

c) Die Ausschließung: p/q

q=	N	M	K	U
p=N	U	M-	K	N
M	M-	M-	K	N
K	K	K	K	N
U	N	N	N	N

Regeln der Ausschließung:

1. p/q ist notwendig, sobald p oder q oder beide unmöglich sind. Im Diagramm: das N-Eck der U-Spalte und U-Zeile.

Up v Uq .NF. N(p/q)

2. p/q ist unmöglich, wenn sowohl p als q notwendig sind. Im Diagramm: U in der Vierung der N-Spalte und N-Zeile.

Np + Nq .NF. U(p/q)

3. Wenn der eine Teil möglich und der andere Teil auch möglich oder notwendig ist, dann ist es möglich, daß p/q nicht zutrifft. Denn angenommen p und q seien möglich, dann kann ihr Wert = 1 sein. In diesem Falle trifft aber p/q nicht zu, da p/q nur wahr ist, wenn wenigstens ein Teil den Wert 0 hat. Ob aber p/q auch zutreffen kann, wenn p und q beide möglich sind, kann nicht ermittelt werden, da Mp nach unseren Definitionen M-p nicht impliziert. Die gleiche Überlegung findet statt, wenn der eine Teil möglich und der andere notwendig ist. Im Diagramm wird die Möglichkeit des Nichtzutreffens von p/q ausgedrückt durch M mit nachgestelltem Verneinungszeichen. Siehe dort M- in der Vierung der M-Spalte und M-Zeile und in den Treffpunkten der M-Spalte und N-Zeile und der M-Zeile und N-Spalte.

[MN + (-N²)] (p + q) .NF. M-(p/q)

4. Ist wenigstens der eine Teil kontingent und der andere Teil nicht unmöglich, dann ist p/q möglich ohne notwendig zu

sein, also kontingent. Im Diagramm: das K-Eck der K-Spalte und K-Zeile.

[K + (-U)] (p v q) .NF. K(p/q)

Bemerkungen: 1. Bei subjektidentischen Aussagen sind folgende Fälle auf Grund der bloßen Form unentscheidbar: MM, MN, MK, NM, KM, KK.

2. Die erste Regel zeigt an, daß U das Feld des Widerstreits mit sich und allem anderen ist. — Die zweite Regel bestätigt die zweite Bemerkung zur zweiten Regel der Konjunktion.

d) Die Implikation: p F q

q=	N	M	K	U
p=N	N	M	K	U(N-)
M	N	M	K	M-
K	N	M	K	K(K-)
U	N	N	N	N(U-)

Regeln der Implikation:

1. p F q ist notwendig wahr, wenn q notwendig oder p unmöglich ist. Zur Begründung vergleiche die Einführung des Implikationsbegriffs. Im Diagramm: Das N-Eck auf der N-Spalte und U-Zeile.

Up v Nq .NF. N(p F q)

2. Wenn q möglich ist, ohne daß p unmöglich ist, ist p F q möglich. Im Diagramm: die M-Linie in der M-Spalte.

Mq + (-Up) .NF. M(p F q)

3. Wenn q kontingent ist, ohne daß p unmöglich ist, oder wenn p kontingent ist und q unmöglich, ist p F q kontingent. Im Diagramm: Das K-Eck in der K-Spalte und K-Zeile.

[Kq + (-Up)] v [Kp + Uq] .NF. K(p F q)

4. Wenn q unmöglich ist, hängt die Modalität von p F q ganz von der Modalität von -p ab; denn p F q ist = -p v q. Nach der Regel der Modalität verneinter Aussagen (s. oben) ist aber Sp .H. S-(-p). Die Modalität von -(-p), und dasselbe gilt bei unmöglichem q auch für -(-p v q) und -(p F q), ist demnach gleich der Modalität von p. Die sich so ergebenden Modalitäten der verneinten Implikation lassen sich dann durch Anwendung mehrerer Äquivalenzregeln (s. oben) in drei Fällen in Modalitäten der Implikation selbst verwandeln.

Wenn p notwendig ist, ergibt sich N-(p F q) und auf Grund von N-p .H. Up weiter U(p F q).

Wenn p möglich ist, ergibt sich M-(p F q).

Wenn p kontingent ist, ergibt sich K-(p F q) und auf Grund von K-p .H. Kp weiter K(p F q).

Wenn p unmöglich ist, ergibt sich U-(p F q) und auf Grund von U-p .H. Np weiter N(p F q).

Zusammenfassend läßt sich sagen: wenn q unmöglich ist, ist die Modalität von p F q jene, die sich aus der Äquivalenz mit der Modalität von p für die verneinte Implikation ergibt. Es sei S eine beliebige Modalität, dann gilt also:

Uq + Sp .NF. S-(p F q)

Bemerkungen: Was in sich notwendig ist, wird auch von dem impliziert, was in sich nicht notwendig ist (z. B. das Dasein Gottes durch das Dasein der Welt). — Das Unmögliche und Widersprüchliche impliziert alles. — Das Unmögliche wird nur vom Unmöglichen notwendig impliziert: die Grundlage der indirekten Beweisart.

e) Die Minimalaussage: Wp$\bar{q}$

q=	N	M	K	U
p=N	N	N	N	N
M	M	M	M	M
K	K	K	K	K
U	U	U	U	U

Regel der Minimalaussage:

Die Modalität von Wp$\bar{q}$ folgt der von p. — Wenn S eine beliebige Modalität ist, gilt:

Sp .NF. S(Wp$\bar{q}$)

Bemerkung: Die Minimalaussage zeigt an, daß nicht alles ausgesagt werden muß, was ausgesagt werden kann, daß Eines ausgesagt werden kann, ohne daß dadurch der Zusammenhang mit dem Andern geleugnet wird. Dadurch sind wir instandgesetzt, z. B. eine Folgerung auch für sich allein zu behaupten, ohne den Folgerungszusammenhang oder die Vordersätze ausdrücklich mitzubehaupten.

f) Die große Alternative: p V q

q=	N	M	K	U
p=N	U	M-	K	N
M	M-	M-	K	M
K	K	K	K	K
U	N	M	K	U

Regeln der großen Alternative:

1. Wenn p oder q kontingent sind, ist auch p V q kontingent. Im Diagramm: das K-Kreuz in der K-Spalte und K-Zeile.

Kp v Kq .NF. K(p V q)

2. Wenn p und q beide unmöglich oder beide notwendig sind, ist p V q unmöglich. Im Diagramm: U in den Treffpunkten der U-Spalte und U-Zeile und der N-Spalte und N-Zeile.

[U^2N^2] (p + q) .NF. U(p V q)

3. Ist der eine Teil notwendig und der andere Teil unmöglich, so ist p V q notwendig. Im Diagramm: N in den Treffpunkten der N-Spalte und U-Zeile und der U-Spalte und N-Zeile.

[NU + (-N^2-U^2)] (p + q) .NF. N(p V q)

4. Ist der eine Teil möglich und der andere Teil unmöglich, so ist p V q möglich. Im Diagramm: M in den Treffpunkten der U-Spalte und M-Zeile und der M-Spalte und U-Zeile.

[MU + (-M^2-U^2)] (p + q) .NF. M(p V q)

5. Ist der eine Teil möglich und der andere Teil auch möglich oder notwendig, so ist es möglich, daß p V q nicht zutrifft. Denn der Ausdruck p V q ist gemäß seiner Definition nur wahr, wenn p und q entgegengesetzte Wahrheitswerte haben. Wenn aber der eine Teil möglich und der andere Teil auch möglich oder notwendig ist, besteht die Möglichkeit, daß beide den gleichen und zwar positiven Wahrheitswert haben, p V q also falsch ist. Ob p V q unter diesen Umständen auch wahr sein könne, läßt sich nicht ermitteln, da Mp gemäß unseren Definitionen M-p nicht impliziert. — Im Diagramm: M- in der Vierung der M-Spalte und M-Zeile und in den Treffpunkten der M-Spalte und N-Zeile und der N-Spalte und M-Zeile.

[MN + (-N^2)] (p + q) .NF. M-(p V q)

Bemerkung: Bei subjektidentischen Aussagen lassen sich MM, MK, KM, KK auf Grund der bloßen Form nicht entscheiden.

g) Die Äquivalenz: p H q

q=	N	M	K	U
p=N	N	M	K	U
M	M	M	K	M-
K	K	K	K	K
U	U	M-	K	N

Regeln der Äquivalenz:

1. Ist der eine Teil möglich und der andere Teil notwendig oder auch möglich, dann ist p H q möglich. Im Diagramm: M

in der Vierung der M-Spalte und M-Zeile und in den Treffpunkten der M-Spalte und N-Zeile und der N-Spalte und M-Zeile.

[MN + (-N^2)] (p + q) .NF. M(p H q)

2. Wenn p und q beide notwendig oder beide unmöglich sind, oder umgekehrt, ist p H q unmöglich. Im Diagramm: U in den Treffpunkten der N-Spalte und U-Zeile und der U-Spalte und N-Zeile.

[U^2N^2] (p + q) .NF. N(p H q)

3. Wenn p notwendig und q unmöglich ist, oder umgekehrt, ist p H q unmöglich. Im Diagramm: U in den Treffpunkten der N-Spalte und U-Zeile und der U-Spalte und N-Zeile.

[NU + (-N^2-U^2)] (p + q) .NF. U(p H q)

4. Ist der eine Teil möglich und der andere unmöglich, so ist es möglich, daß p H q nicht zutrifft. Denn p H q ist der Definition gemäß nur wahr, wenn die Werte von p und q gleich sind. Im Diagramm: M- in den Treffpunkten der U-Spalte und M-Zeile und der M-Spalte und U-Zeile.

[MU + (-M^2-U^2)] (p + q) .NF. M-(p H q)

5. Ist wenigstens ein Teil kontingent, so ist auch p H q kontingent. Im Diagramm: das K-Kreuz in der K-Spalte und K-Zeile.

[K](p v q) .NF. K(p H q)

Bemerkung: Bei subjektidentischen Aussagen läßt sich für MM, KM, MK, KK die Modalität nicht entscheiden auf Grund der bloßen Form.

Die folgende *Tabelle* beantwortet die Frage, wie oft die verschiedenen Modalitäten in den Aussageverbindungen unter den verschiedenen Voraussetzungen auftreten.

	Konj.	Kl. Altern.	Ausschl.	Impl.	Min.	Gr. Altern.	Äqu.
M	3	5	0	3	4	2	3
M-	0	0	3	1	0	3	2
U	7	1	1	1	4	2	2
N	1	7	7	7	4	2	2
K	5	3	5	4	4	7	7

Bei *subjektidentischen* Aussagen sind als unentscheidbare Fälle abzuziehen:

?	4	0	6	0	0	4	4

Die Formverwandtschaft mancher Funktionen zeigt sich auch in den Diagrammen und in der Tabelle. — So bzgl.

der Ausschließung und der Konjunktion. Da p/q = -p v -q ist, ist die Ausschließung äquivalent zur verneinten Konjunktion: p + q .H. -(p/q). In den Diagrammen kommt das dadurch zum Ausdruck, daß vertauscht sind: N mit U und M mit M-. Die bivalenten K bleiben an ihrer Stelle. Siehe auch die umgekehrten Zahlen in der Tabelle.

Die kleine Alternative und die Ausschließung haben dieselbe Form, aber mit anderen Elementen: kl. Altern. = p v q; Ausschl. = p/q = -p v -q. Die Vertauschungsverhältnisse in den Diagrammen und der Tabelle sind verwickelter.

Die große Alternative ist die Umkehrung der Äquivalenz. In den Diagrammen kommt das zum Ausdruck durch die Vertauschung von M und M-, sowie von N und U. Die bivalenten K bleiben an ihrer Stelle.

Die Implikation ist am nächsten verwandt mit der kleinen Alternative: p F q = - p v q. Die Formverwandtschaft ist in den Diagrammen nur ersichtlich, wenn man berücksichtigt, daß die Implikation im Gegensatz zur kleinen Alternative keine symmetrische Funktion ist[8].

---

[8] Was die weitere Ausgestaltung dieser Arbeit angeht, bin ich Jos. de Vries für eine Reihe von Anregungen zu Dank verpflichtet.