Mathematik und wirkliche Welt.

Gedanken zu einer philosophischen Theorie der mathematischen Physik.

Von Nikolaus Junk.

Unser Wissen über die Natur, das uns durch die exakten Wissenschaften vermittelt wird, ist in der Sprache der Mathematik geschrieben. Die mathematische Formelsprache ist die eigentliche Sprache der theoretischen Physik, sodaß theoretische Physik mit mathematischer Physik gleichgesetzt werden kann. Für den theoretischen Physiker als solchen gilt mit dieser mathematischen Formulierung der Forschungsergebnisse seine Aufgabe als erledigt. Die Gesamtheit der mathematischen Formeln ist ihm die erschöpfende Kenntnis der Natur[1]. Will jedoch der Philosoph die Ergebnisse der exakten Wissenschaft zur Grundlage naturphilosophischer Besinnung machen, dann bedarf es einer Übersetzung der mathematischen Sprache in die Wortsprache, um zu dem Wirklichkeitsgehalt und zu den Wirklichkeitsaussagen zu gelangen, die die physikalischen Theorien enthalten. Wie schwierig dieses Unternehmen ist, zeigen die Bemühungen der letzten Jahrzehnte, eine richtige Deutung der modernen Physik zu finden, und nicht zuletzt die vielen Irrtümer und Mißverständnisse, die bei diesem Bemühungen zutage getreten sind. Unser Aufsatz stellt einen Versuch dar, die allgemeinen Beziehungen von Mathematik und Wirklichkeit aufzuhellen, somit den Versuch einer Theorie der angewandten Mathematik.

I.

Bevor die Frage der angewandten Mathematik untersucht werden kann, ist es zunächst erforderlich, Klarheit zu gewinnen über die Mathematik als solche, d. h. über die reine Mathematik. Bekannt und weitverbreitet ist die Charakterisierung der Mathematik als Wissenschaft von der Größe; bis ins 19. Jahrhundert hinein war diese Auffassung herrschend, und auch heute noch zählt sie manche Vertreter. Diese Kennzeichnung dürfte jedoch für die Mathematik, wie sie im Laufe der Entwicklung inzwischen geworden ist, nicht mehr zutreffen. Eine philosophische Deutung der mathematischen Erkenntnis darf sich nicht darauf beschränken, die elementare Mathematik, wie sie etwa in den „Elementen" des Euklid und in der gewöhnlichen Zahlenlehre vorliegt, zum Gegenstand der Besinnung zu machen[2], sondern muß ausgehen von der Mathematik, wie sie

[1] Vgl. P. Jordan, Am Rande der Welt: Die Neue Rundschau (52. Jg. der Freien Bühne) 1941, 294.

[2] Nur zu oft schöpfen Philosophen ihr Wissen über Mathematik aus Darstellungen der Elementarmathematik oder aus abgeleiteten, bereits

als Wissenschaft heute betrieben und von den berufenen Vertretern dieser Wissenschaft verstanden wird. Die moderne wissenschaftliche Mathematik ist aber von der Elementarmathematik und der Mathematik früherer Zeiten in manchen Punkten verschieden. Wäre Mathematik die Wissenschaft von der Größe, dann wären große Gebiete, die in der heutigen Mathematik eine bedeutende und zum Teil grundlegende Rolle spielen, als nichtmathematische Disziplinen aus dem Bereich der Mathematik auszuschneiden, so z. B. die Kombinatorik, die Topologie, die projektive Geometrie, die abstrakte Gruppentheorie u. a.

Doch auch für die übrigen Teile der Mathematik von heute kann die Größe nicht als eigentümlicher Gegenstand angesehen werden. Die Mathematik hat wohl ihren Ausgang genommen von den in der anschaulich gegebenen Ausdehnung und der Vielheit von Dingen vorliegenden Größenverhältnissen, hat dann aber in stetig fortschreitender Entwicklung die Abstraktion beträchtlich weiter getrieben und zu Gebilden geführt, die nicht mehr zur Kategorie der Größe gehören. Diese höchst abstrakten Begriffe, zu denen die Mathematik in folgerichtiger Anwendung ihrer Methoden gelangt, haben oft noch den Namen, der ihnen anfänglich zukam, beibehalten, sie bedeuten jedoch etwas ganz anderes, worauf der ursprüngliche Begriff höchstens noch in analoger Weise paßt[3]. Diese Ausweitung der Begriffe trifft sowohl für die geometrischen wie die arithmetischen Begriffe zu.

Es ist irreführend und muß zu falschen Auffassungen Anlaß geben, wenn man bei einer philosophischen Besinnung über das *Wesen der Geometrie* ausgeht von der euklidischen Geometrie und ihrem anschaulichen Charakter und die nicht-euklidischen Geometrien von dieser Position aus zu verstehen und zu deuten sucht. Bei einer solchen Betrachtung erscheinen dann die nicht-euklidischen Geometrien als Systeme, die sich aus der euklidischen Geometrie ergeben durch Weglassung des Parallelenaxioms, als „entartete" Formen der Geometrie, da die euklidische Geometrie als eigentliche Geometrie vorausgesetzt wird[4]. Historisch gaben zwar die Bemühungen um eine Klärung

verderbten Quellen, selten aus eigener Kenntnis der heutigen Mathematik. Es ist nicht zu verwundern, daß die Mathematiker nicht gewillt sind, sich von solchen Philosophen über den Sinn ihres eigenen wissenschaftlichen Tuns belehren zu lassen und daß dadurch die ganze Philosophie bei manchen Mathematikern in Verruf geraten ist.

[3] Eine heillose Verwirrung ist bereits dadurch entstanden, daß der veränderte Sinn solcher Begriffe wie Zahl, Punkt usw. nicht beachtet wurde. Schon M. Pasch, der selbst viel beigetragen hat zur Erweiterung der Begriffe in der neueren Mathematik, macht auf diese Gefahr aufmerksam und führt sogar neue Namen ein, um dieser Gefahr eines Mißverständnisses wirksam vorzubeugen. Vgl. vor allem: Vorlesungen über Neuere Geometrie, Leipzig 1882. — Grundfragen der Geometrie: Journal f. reine und angew. Mathematik 147 (1917) 188 ff.

[4] J.-M. Dario, Praelectiones Cosmologiae, Paris 1923, 77 ff. geht soweit, den nicht-euklidischen Geometrien den Charakter der Geometrie

der Stellung des Parallelenaxioms innerhalb der euklidischen Axiomatik den Anstoß zur ersten Ausbildung noch unvollkommener nicht-euklidischer Geometrien[5]; auch didaktisch wird es von Vorteil sein, eine erste Einführung in das Verständnis der nicht-euklidischen Geometrien für Anfänger von der als bereits bekannt vorausgesetzten euklidischen Geometrie her zu versuchen. Handelt es sich aber darum, ein philosophisch begründetes Urteil über den Sinn der Geometrie überhaupt oder auch nur der nicht-euklidischen Geometrien zu fällen, dann darf nicht ein solches Zerrgebilde der nicht-euklidischen Geometrien zugrunde gelegt werden, sondern alle Formen der Geometrie müssen in ihrem inneren mathematischen Zusammenhang gesehen werden. In dieser Sicht erscheint die euklidische Geometrie genau wie die nicht-euklidischen Geometrien als ein Spezialfall der projektiven Geometrie. Diese betrachtet nur *die* Eigenschaften mathematischer Gebilde, die bei projektiven Transformationen oder Kollineationen unverändert erhalten bleiben, sie ist die Invariantentheorie aller linearen Transformationen. In ihrer allgemeinen Form kennt sie keine metrischen Eigenschaften wie etwa Längen und Winkelgrößen. Erst wenn ihr Maßbestimmungen aufgeprägt werden, bei denen die metrischen Eigenschaften erhalten bleiben, so wird eine quadratische Form ausgezeichnet, die als Untergruppen die euklidische und die nicht-euklidischen Geometrien umfaßt[6]. Somit ist

---

überhaupt abzusprechen. Sie könnten nur mißbräuchlich Geometrie genannt werden. — Auch der Begriff der Geometrie hat eine Ausweitung erfahren und kann nicht etwa mit »Landmessung« übersetzt werden. Vgl. auch Anm. 29.

[5] Vgl. darüber etwa F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 26), Berlin 1928, 271—277. — Diese ersten Anfänge von Joh. Bolyai, Lobatschefskij und Riemann waren aber nur ein Ausgangspunkt; die mathematisch strenge Begründung und Ausführung blieb späteren Zeiten überlassen. Siehe die folgende Anmerkung.

[6] Es muß für unseren Zweck genügen, durch diese kurzen Andeutungen den Zusammenhang der verschiedenen Geometrien aufzuzeigen. Eine eingehende Erörterung der pythagoreischen oder quadratisch-metrischen Geometrie als der Untergruppe der projektiven Geometrie, bei der ein bestimmter Kegelschnitt unverändert bleibt, würde hier zu weit führen. Eine solche Erörterung würde aber zeigen, daß man die elliptische Geometrie nicht einfachhin mit der Riemannschen und die hyperbolische nicht mit der Lobatschefskijschen gleichsetzen darf. Ferner würde sich ergeben, daß rein mathematisch betrachtet, abgesehen von der elementaren Anwendung, die euklidische Geometrie als ausgeartet bezeichnet werden muß. Sie entspricht nämlich dem konjugiert-imaginären Punktepaar, das einen entarteten Kegelschnitt darstellt. Wie sich nun die Lehre von den eigentlichen Kegelschnitten nicht rekonstruieren läßt aus der Lehre vom imaginären Punktepaar, so lassen sich auch die nicht-euklidischen Geometrien nicht aus der euklidischen herleiten, wie es nach manchen unkorrekten Darstellungen den Anschein haben könnte. Die exakte Begründung der nicht-euklidischen Geometrien als Untergruppen der projektiven Geometrie ist vor allem

die projektive Geometrie die höhere Einheit, die euklidische und nicht-euklidische Geometrien umfaßt. Die Eigentümlichkeiten der projektiven Geometrie finden sich sowohl in der euklidischen wie in den nicht-euklidischen Geometrien.

Die Begriffe der projektiven Geometrie sind nun aber nicht mehr Begriffe von Größen. Der projektive Punkt ist nicht die Grenze eines eindimensionalen Ausdehnungsgebildes, wie er in der Elementarmathematik verstanden wird, sondern ein viel abstrakteres Gedankengebilde, das nur den in den Axiomen ausgesprochenen Beziehungen unterliegt und von Quantität nichts mehr enthält. Dasselbe gilt auch von den projektiven Geraden, der projektiven Ebene und dem projektiven Raum[7]. In dieser Abstraktheit müssen die mathematischen Begriffe von einem höheren Standpunkt aus folgerichtig auch in der Elementarmathematik, sofern sie als reine Mathematik und nicht bereits als Anwendung gedeutet werden soll, verstanden werden, wenn auch die Formen der Geometrie, die durch Einführung von Maßbestimmungen in die maßfreie projektive Geometrie entstanden sind, als Objekt die meßbare Größe haben können. Die Begriffe und Axiome der projektiven Geometrie werden auch durch *nicht-quantitative* Gebilde erfüllt, etwa durch die Farb*qualitäten*[8].

Eine ähnliche Ausweitung haben auch die Begriffe der *Arithmetik* durchgemacht. Der Zahlbegriff, mit dem die moderne Arithmetik operiert, ist nicht der Zahlbegriff des gewöhnlichen Sprachgebrauches und auch nicht die Auffassung von der Zahl, wie sie in der elementaren Zahlenlehre auftritt und meist in philosophischen Erörterungen über die Zahl zugrunde gelegt wird. Eine Definition der Zahl muß den verschiedenen Arten von Zahlen, die die Mathematik kennt, den rationalen, irrationalen, komplexen, transfiniten Zahlen[9] gerecht werden.

F. Klein zu danken, der dabei auf Vorarbeiten von Cayley aufbaute. Vgl. das in der vorigen Anmerkung angeführte Buch.

[7] Um einer Verwechslung vorzubeugen führt M. Pasch für Punkt, Gerade und Ebene der projektiven Geometrie die Namen: Monade, Dyade und Triade ein. Grundfragen der Geometrie: Journal f. reine u. angew. Mathematik 147 (1917) 188.

[8] Diese Zuordnung findet sich bei H. Weyl, Philosophie der Mathematik u. Naturwissenschaft (Handb. d. Philosophie, hrsg. von A. Bäumler u. M. Schröter, Abt. II) München u. Berlin 1927, 56.

[9] Irrationale und komplexe Zahlen gehören heute zum gesicherten Bestand der Mathematik. Die Erweiterung des Zahlbegriffes auch auf diese Zahlen ist, wie auch die Ausweitung der geometrischen Begriffe, nicht mathematischer Willkür oder dem Suchen nach Hilfsmitteln zur Erleichterung mathematischer Rechnungen entsprungen, sondern diese Zahlen verdanken ihre Einführung der immanenten Dynamik des mathematischen Tuns, die zu ihrer Einführung drängte. Bis jetzt ist es allerdings noch nicht gelungen, die Widersprüche, die sich bei der Annahme transfiniter Mengen ergeben, vollständig zu beseitigen und damit die transfiniten Zahlen in ihrem vollen Umfange als mathematisch ein-

In der Mathematik ist nun die Zahl weiter nichts als ein gedachter Gegenstand, der mit gleichartigen anderen durch die Axiome der Arithmetik in bestimmten Beziehungen steht. Sie ist also in irgend einer Weise Terminus von Relationen. Jedenfalls handelt es sich nicht um einen Größenbegriff. Die transfiniten Kardinalzahlen bezeichnen eher eine qualitative denn eine quantitative Bestimmtheit. Auf der Suche nach einem Gegenstand der Mathematik, der nicht die Größe sei, kommt A. Voß dazu, die Zahl als Gegenstand der Mathematik zu bezeichnen[10], ein Zeichen, daß die Zahl nicht als Größe aufgefaßt werden kann. Eine befriedigende philosophische Definition der Zahl, wie sie in der heutigen Mathematik verstanden wird, steht noch aus[11].

Der Unterschied zwischen Geometrie und Arithmetik ist nun folgender: in der Geometrie gibt es verschiedene Arten von Gegenständen, wie Punkt, Gerade usw., aber nur eine Art von Beziehung, die Inzidenzen; in der Arithmetik dagegen gibt es nur eine Art von Gegenständen, die Zahlen in höchst abstrakter Bedeutung, und mehrere Arten von Beziehungen.

Die Größe kann also nicht als der eigentliche Gegenstand der Mathematik, wie sie heute verstanden wird, bezeichnet werden[12]. Die Wissenschaft, die der Abstraktionsstufe der Quantitas entspricht, dürfte eher die moderne theoretische Physik sein. Sie bedeutet aber bereits eine Anwendung und gehört nicht mehr zum Bereich der reinen Mathematik, wie sie ja auch nicht vom Mathematiker, sondern vom Physiker betrieben wird[13]. Auf

---

wandfrei zu erweisen. Es besteht aber begründete Hoffnung, daß die arithmetische Grundlagenforschung noch zu diesem Ziele führen wird. Es hat den Anschein, daß die genannten Antinomien z. T. wenigstens damit zusammenhängen, daß der Begriff der Zahl noch nicht abstrakt genug gefaßt worden ist. — Es ist selbstverständlich, daß die in dieser Weise erweiterten Begriffe in Bezug auf die verschiedenen Arten von Gegenständen, die ihren Umfang ausmachen, nicht mehr univok, sondern analog sind.

[10] A. Voß, Über das Wesen der Mathematik, Leipzig u. Berlin 1922³, 24 ff. Ferner A. Voß, Über die mathematische Erkenntnis (Kultur der Gegenwart, III. Tl. 1. Abt., 3. Lfg.) Leipzig u. Berlin 1914, 18 ff.

[11] Vgl. die Zusammenstellung solcher Definitionen bei A. Antweiler, Unendlich, Freiburg 1934, 47 ff.

[12] Zwar finden sich auch in den mathematischen Begriffen Elemente der Größenordnung. Doch das trifft für viele Begriffe zu und rechtfertigt noch nicht die Charakterisierung der Mathematik als Wissenschaft von der Größe. Ja, da »die Begriffe: Einheit, Vielheit, Maß und Größe in alle Begriffe eindringen, ist ein der Mathematik übergeordnetes, selbständiges Gebiet begrifflicher Untersuchungen, das frei von allen mathematischen Bestandteilen [d. h. Bestandteilen der Größenordnung] wäre, unmöglich« (C. Nink, Der Sinn der Mathematik: Schol 14 [1939] 561 f.).

[13] Daß auch heute noch vielfach die Größe als Gegenstand der Mathematik angesehen wird, findet zum Teil wenigstens seinen Grund darin, daß man nicht die reine Mathematik betrachtet, sondern bereits

die Frage nach dem Eigengegenstand der reinen Mathematik läßt sich augenblicklich kaum eine endgültige und restlos befriedigende Antwort geben. Wir müssen uns mit dem Versuch einer vorläufigen Lösung begnügen.

Um nun zu einer Charakterisierung der Mathematik zu gelangen, gehen wir zunächst aus von der *mathematischen Methode.* Der Mathematik in ihrer Vollendung ist es eigentümlich, daß sie auf deduktivem Wege zu Schlußfolgerungen zu kommen sucht und zwar aus möglichst wenigen Fundamentalsätzen oder Axiomen. Dabei ist für die Mathematik als solche die Frage nach der Realgeltung nicht von Belang — diese Frage wird erst akut bei der Anwendung der Mathematik auf die Wirklichkeit —, der Mathematik kommt es allein auf die Folgerichtigkeit der Deduktionen an. Die axiomatische Methode wurde bereits begründet durch die „Elemente" des Euklid. In der neueren Mathematik wurde sie vorzüglich durch M. Pasch[14], Peano[15] und in ausgedehntem Maß dann durch Hilbert[16] entwickelt. In der heutigen Mathematik gilt ein Gebiet erst dann als mathematisch begründet und berechtigt, wenn der axiomatische Aufbau in strenger Form geglückt ist: „Die axiomatische Methode besteht einfach darin, die Grundbegriffe und die Grundtatsachen, aus denen sich die sämtlichen Begriffe und Sätze einer Wissenschaft definitorisch bzw. deduktiv herleiten lassen, vollständig zu sammeln"[17]. Die einzigen Forderungen, die an ein Axiomensystem gestellt werden müssen, sind, daß die Axiome vollständig sind, sodaß die ganze Wissenschaft sich aus ihnen ableiten läßt, und daß sie von einander unabhängig und widerspruchsfrei sind[18]. Das gesamte mathematische Tun

---

die Anwendung, dazu oft noch in elementarer Form. Angewandt aber wird die Mathematik auch heute fast immer noch zur Darstellung und Meisterung von Größenverhältnissen.

[14] Vorlesungen über Neuere Geometrie, Leipzig 1882. — Betrachtungen zur Begründung der Mathematik: Math. Zs 20 (1924) 231—240; 25 (1926) 166—171. — Die axiomatische Methode in der neueren Mathematik: Annal. der Phil. u. phil. Kritik 5 (1926) 241—274, u. a. m.

[15] Principii di geometria logicamente esposti, Torino 1889. — Arithmetices principia, Torino 1889, u. a.

[16] Grundlagen der Geometrie (Wissensch. u. Hypothese, VII. Bd.) zuerst erschienen 1899, 1930[7]. — Axiomatisches Denken: Math. Annal. 78 (1918) 405—419, u. a. m.

[17] H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 16.

[18] In welcher Weise der Nachweis erbracht werden kann, daß diese Forderungen bei einem Axiomensystem erfüllt sind, ist für unsere Untersuchung nicht von Bedeutung. Auch interessiert nicht die Frage, welche Methoden angewandt werden, um das Axiomensystem aufzustellen. Es genügt z. B. von bereits vorhandenen und bekannten Sätzen eines mathematischen Gebietes ausgehend, die grundlegenden Sätze zu suchen, aus denen sich die Sätze des betreffenden Gebietes deduktiv ergeben. Die passenden Ursätze zu finden, erfordert viel Scharfsinn. Ist in dieser Weise ein System von Axiomen aufgestellt, dann werden

besteht dann in dem Aufsuchen der Beziehungen, die aus einem solchen System abgeleitet werden können. Damit offenbart sich die Mathematik als eine Wissenschaft, die an dem Inhalt ihrer Begriffe nur insoweit interessiert ist, als dadurch die Beziehungen oder Verknüpfungen fundiert werden, die zwischen ihren Gegenständen obwalten. Die mathematischen Begriffe gelten als genügend definiert dadurch, daß sie die Axiome erfüllen. Das, worauf es der Mathematik ankommt, sind wiederum nur die Beziehungen, die in den Axiomen zum Ausdruck kommen.

Gegenstand der Mathematik sind demnach widerspruchsfrei denkbare Dinge, die selbst Beziehungen oder doch Termini von Beziehungen sind[19]. Damit wäre aber der Mathematik noch kein ihr allein zukommender Gegenstand zugewiesen, vor allem wäre sie nicht genügend von der Logik und ihrem Gegenstande unterschieden. In der Tat gibt es ja manche Denker, die Logik und Mathematik glauben gleichsetzen zu müssen, oder die eine der beiden Wissenschaften aus der anderen herleiten[20]. Der Gegenstand der Mathematik läßt sich aber noch näher kennzeichnen unter Berücksichtigung der der Mathematik eigentümlichen Symbolsprache. Dann läßt sich sagen, Gegenstand der Mathematik seien widerspruchsfrei denkbare Gedankendinge, sofern sie der symbolischen Festlegung durch mathematische Zeichen fähig sind und den Operationen, die für diese Zeichen gelten, unterworfen werden können[21]. Damit hätte die Mathematik

---

sich meist durch Deduktion auch noch neue bisher unbekannte Sätze ergeben.

19 Diese allgemeine Feststellung ist unabhängig von dem Streit zwischen den beiden großen Systemen des Intuitionismus (oder Neointuitionismus) und des Formalismus, die beide die Frage der mathematischen Existenz zu klären suchen. Unter Führung Brouwers, dem sich auch Weyl angeschlossen hat, deutet der Neointuitionismus die Existenz in der Mathematik als Konstruierbarkeit. Als mathematische Gegenstände werden nur solche anerkannt, die mit endlich vielen Schritten konstruierbar und aufweisbar sind. Danach müßten dann viele bisher in der Mathematik wegen ihrer scharfsinnigen Gedankenführungen besonders anerkannte reine Existenzbeweise abgelehnt werden; außerdem führt diese Anschauung u. a. zur unannehmbaren Folgerung der Preisgabe des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten. Darum bekennen sich denn auch die meisten Mathematiker im Anschluß an Hilbert zum Formalismus, der für die Existenz eines mathematischen Gegenstandes nur Widerspruchsfreiheit fordert, ohne sonst auf den Inhalt der Begriffe überhaupt Bezug zu nehmen. Der Intuitionismus berücksichtigt bei seiner Deutung vor allem die Herkunft der mathematischen Begriffe, während der Formalismus seine Aufmerksamkeit besonders der vollendeten mathematischen Wissenschaft zuwendet. Keine der beiden Auffassungen dürfte von Einseitigkeiten frei sein, wenngleich auch beide einen wahren Kern enthalten.

20 Nachdem diese Auffassung erstmals von G. Frege vertreten wurde, hat sie durch B. Russell und A. N. Whitehead manche Anhänger gewonnen.

21 Nicht das mathematische Symbol ist Gegenstand der Mathematik, wie es manche anscheinend auffassen, sondern das mit dem Symbol Gemeinte. Indes ist die Symbolsprache der Mathematik wesentlich.

einen von der Logik verschiedenen eigenen Gegenstand. Die Logistik, die logische Fragen in mathematischer Weise behandelt, wäre als Grenzgebiet zwischen Logik und Mathematik zu betrachten oder aber der Mathematik zuzuweisen. Auch im letzteren Falle wäre nicht zu befürchten, daß die Logik in der Mathematik aufgeht, da nur in sehr beschränktem Maße logische Probleme der mathematischen Behandlung zugänglich sind[22]. Zudem sind die Prinzipien der Logik über folgerichtiges Schließen und andere logische Prinzipien grundlegend für die Mathematik, ohne jedoch dadurch zu mathematischen Prinzipien zu werden.

II.

Die reine Mathematik ist also eine allgemeine Relationstheorie. Ihr Ziel ist es, möglichst alle Beziehungen, die zwischen den durch die Axiome „implizit" definierten Objekten bestehen, aufzusuchen und durch Deduktion herzuleiten. Sie ist eine für sich abgeschlossene Wissenschaft und findet ihre Erfüllung in sich selbst. Aber von jeher wurden mathematische Begriffe angewandt auf die Gebilde der Wirklichkeit[23]. Die neuere Naturwissenschaft seit Galilei und Newton verdankt ihre großen Fortschritte und Erfolge gerade der umfassenden Anwendung mathematischer Mittel bei Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen. In den Naturwissenschaften besteht seitdem die Überzeugung, daß das Naturgeschehen seinen passendsten Ausdruck findet in den durch die Mathematik bereitgestellten begrifflichen Formen. Dabei dient die Sprache der Mathematik nicht nur dazu, die erforschten Tatbestände exakt zu beschreiben. Die mathematischen Formeln gestatten auch, die Ergebnisse eines jeden Experimentes vorauszusagen, ohne daß ein Widerspruch mit der Natur zu befürchten wäre. Doch immer wieder wurde die Frage gestellt, wie es möglich sei, daß aus dem wenigen Material, das in den mathematischen Axiomen gesammelt vorliegt, so weitreichende Schlüsse auch für das Gebiet der Wirklichkeit gezogen werden könnten.

Mathematische Erkenntnisse sind Beziehungserkenntnisse derart, daß die zwischen den mathematischen Gegenständen aufgedeckten Beziehungen *wesensnotwendig* bestehen. Wo immer also sich die mathematischen Begriffe verwirklicht finden, müssen sie auch in den betreffenden Beziehungen stehend an-

[22] Vgl. C. Nink, Die mathematisch-logistische Symbolsprache in philosophischer Sicht: Schol 15 (1940) 57—62. Ferner J. de Vries, Logistische Zeichensprache und Philosophie: Schol 16 (1941) 369—379. — Daß andererseits auch auf mathematischem Wege logische Fragen eine Antwort finden können, die sonst nicht mit der entsprechenden Exaktheit zu beantworten wären, zeigt W. Brugger, Die Modalität einfacher Aussageverbindungen: Schol 17 (1942) 217—235.

[23] Vgl. W. Heisenberg, Die mathematische Gesetzmäßigkeit in der Natur, in: E. Dennert, Die Natur — das Wunder Gottes, Berlin 1942, 28—34.

getroffen werden. Oder wenn sie in die entsprechendenBeziehungen versetzt werden, müssen die mathematischen Formeln und Gleichungen für sie zutreffen· Als angewandte Wissenschaft betrachtet, trägt die Mathematik, die als reine Mathematik nicht von den Dingen der Wirklichkeit handelt, hypothetisch-deduktiven Charakter, insofern nämlich ihre Sätze besagen: Wenn das mit dem mathematischen Begriff Gemeinte von einem Ding der Wirklichkeit ausgesagt werden kann, gilt auch das weitere, was diesem Begriff durch die mathematischen Formeln zugeschrieben wird. Es ist darum garnicht verwunderlich, daß aus dem System mathematischer Formeln, die einen experimentellen Vorgang vollständig wiedergeben, der Ausgang eines Experimentes sich zum voraus bereits berechnen läßt. Voraussetzung dafür ist nur, daß die mathematischen Begriffe in der Wirklichkeit ihre Erfüllung finden. Die ganze Frage der angewandten Mathematik kommt also hinaus auf die Frage, inwieweit die mathematischen Gegenstände in der Naturwissenschaft angetroffen werden.

Ziemlich einfach läßt sich die Entsprechung zwischen den Begriffen der Mathematik und den Naturgegenständen feststellen, solange es sich noch um die elementare Mathematik handelt. Allerdings sind bereits die elementarmathematischen Begriffe, wie Punkt, Gerade, Ebene usw. nicht einfache Abstraktionen aus der *Wirklichkeit*, sodaß sich diese Begriffe auch nicht in ganzer Strenge an den wirklichen Dingen vorfinden. Sie sind vielmehr der *Anschauung* entnommen, in der die Wirklichkeit bereits „idealisiert" ist[24]. Die konkreten Körper der Welt sind nicht in der Weise kontinuierlich ausgedehnt, wie sie uns in der Anschauung gegeben sind. Die Lücken der ununterbrochenen Erstreckung werden von unserem sinnlichen Erkenntnisvermögen, dessen Zweck es ja vornehmlich ist, uns das praktische Leben in der materiellen Welt zu ermöglichen, „übersehen" und die Kontinuität in die Dinge „hineingesehen". Durch Abstraktion aus der Wirklichkeit, *wie sie in der Anschauung gegeben ist*, werden die ursprünglichen geometrischen Begriffe gebildet, die aber den wirklichen Dingen, denen sie zugeordnet werden, nur annäherungsweise entsprechen. Der mathematische Gegenstand „Punkt" ist ohne jede Ausdehnung, der wirkliche „Punkt" aber hat immer eine gewisse, wenn auch noch so geringe Ausdehnung. Ähnliches gilt von den übrigen elementarmathematischen Begriffen. Die mathematischen Gegenstände sind „Bilder" für die Dinge der wirklichen Welt, die ihnen aber nur in einer gewissen „ersten Annäherung" entsprechen. Zu der Abstraktion

[24] Eine eingehende Behandlung dieser Idealisierung bietet E. Kaila, Über den physikalischen Realitätsbegriff, Helsinki 1942, 59 ff. Vgl. Schol 18 (1943) 143.

kommt also schon bei den Gegenständen der Elementarmathematik eine Idealisation[25].

Die damit gegebene Ungenauigkeit wird noch vergrößert durch die Ungenauigkeit, die jeder Messung anhaftet. Nur wenn es sich um die reine Abzählung einer endlichen Menge von Einzelgegenständen handelt, kann ein wirklicher Gegenstand eine Größe mit der Exaktheit verwirklichen, wie sie der Maßzahl zukommt, die dieser Größe mathematisch zugeordnet wird. Jede Messung findet eine untere, prinzipiell unüberschreitbare Grenze in der Ausdehnung der kleinsten Materieteilchen[26]. Auch abgesehen von dieser Ungenauigkeit, die auch das beste Meßverfahren mit sich bringt, ist die Größe eines wirklichen Körpers niemals präzis festgelegt, weil ja doch die Molekeln und Atome nie vollständig in Ruhe sind. Um die Verhältnisse der wirklichen Welt meistern zu können, genügt aber nicht eine Approximationsmathematik, da diese immer die Präzisionsmathematik voraussetzt. So führt z. B. die Messung einer wirklichen Länge niemals zu einer Irrationalzahl als Maß dieser Länge, ja eine Messung wird garnicht zu einer Irrationalzahl führen *können*, da jede Messung ihrem Begriffe nach die Kommensurabilität des zu messenden Gegenstandes voraussetzt[27]. Eine mathematische Behandlung der wirklichen Maßverhältnisse ist indes nicht möglich ohne Gebrauch von Irrationalzahlen. So herrscht schon bei den elementarmathematischen Anwendungen niemals eine vollkommene Übereinstimmung zwischen dem wirklichen Gegenstand und dem ihn darstellenden mathematischen Gegenstand. Aber trotz dieser Ungenauigkeiten in der Entsprechung ist die Mathematik in ausgezeichneter Weise geeignet, das Naturgeschehen darzustellen[28].

Diese Anwendung der elementaren Mathematik auf die Wirklichkeit bedeutet zunächst nur, daß es möglich ist, mit Hilfe der

---

[25] Diese Idealisierung, die bei den einfachen mathematischen Begriffen statthat, ist nicht zu verwechseln mit den »idealen« oder uneigentlichen Elementen in der Mathematik. Diese letzteren sind 1882 von M. Pasch mathematisch endgültig entwickelt worden und bedeuten eine Erweiterung der elementar-mathematischen Begriffe. Siehe das in Anm. 3, 7, 9 Gesagte.

[26] Vgl. A. March, Raum, Zeit und Naturgesetze: Naturw. 31 (1943) 49—59.

[27] Irrationalzahlen sind nämlich nicht »unvernünftige« oder auch »übervernünftige« Zahlen, wie es sogar M. Bense (Geist der Mathematik, München u. Berlin 1939, 19 ff.) anzunehmen scheint. Sie heißen irrational, weil sie kein Verhältnis (ratio) zur Einheit haben, mit der Einheit inkommensurabel sind.

[28] Daß diese mathematische Beschreibung der Natur nur e i n e Seite der Natur erfaßt, die nämlich der mathematischen Behandlung zugänglich ist, braucht nicht eigens dargetan zu werden. Dieses Problem liegt den Absichten unseres Aufsatzes voraus, der sich nur mit dem Problem beschäftigt, wie und in wieweit gerade diese eine Seite der wirklichen Welt von der Mathematk betroffen wird.

Mathematik die Wirklichkeit zu beschreiben und die Verhältnisse und Vorgänge in der Natur mathematisch zu beherrschen. Es ist aber damit an sich noch nicht gesagt, daß die elementare oder euklidische Mathematik in der Wirklichkeit auch gelte. Innermathematisch spielt die Frage nach der Realgeltung der Sätze und auch der Axiome keine Rolle. Sie gewinnt erst Bedeutung, wenn die mathematischen Begriffe und Sätze auf außermathematische Gegenstände angewandt werden.

Die Behauptung, die euklidische Geometrie gelte in der Wirklichkeit, bedeutet, die Welt der Wirklichkeit sei euklidisch strukturiert, d. h. die Dinge der Wirklichkeit, die den Begriffen der Geometrie in der oben dargelegten Weise zugeordnet werden, ständen auch in den durch die euklidischen Axiome ausgesprochenen Beziehungen. Da sie nicht in der strengen Form verwirklicht sind, ist die Frage nach der Geltung durch die Anwendung allein noch nicht in positivem Sinn beantwortet. Sie läßt sich auch nicht a priori entscheiden. Die Mathematik zeigt nämlich eine Mehrheit von möglichen Geometrien[29] und es ist Sache der Erfahrung, zu entscheiden, welche von diesen möglichen Formen die Struktur der Welt richtig wiedergibt.

Selbstverständlich ist es möglich, einen leeren, homogenen, isotropen Raum zu konzipieren und als Ordnungsschema oder Leersystem möglicher Gegenstände für die räumliche Ordnung der Welt den Betrachtungen zugrunde zu legen. Es ist das weiter nichts als ein Koordinatensystem, auf das die räumlichen Gegenstände in der Welt bezogen werden. In diesem Raum „gelten“ auch die euklidischen Axiome, denn es ist ja der Raum der euklidischen Geometrie[30]. Doch dieses abstrakte Schema und Ordnungsgefüge, wenngleich es auch auf Grund unserer unmittelbaren sinnlichen Anschauung gebildet worden ist, sagt garnichts aus über die Struktur der wirklichen Welt. Dieser Raum ist ein Gedankending, das als solches garnicht in der

[29] Auch wenn man mit F. Klein (Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, 164, 188 ff., 205 ff.) von den unendlich vielen logisch und mathematisch gleichwertigen Möglichkeiten der Maßbestimmung als »Geometrien« nur je Formen gelten lassen will, die praktische Anwendung auf die Wirklichkeit zulassen, bleiben mindestens noch die drei Formen der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen (= euklidischen) Geometrie.

[30] Nicht mehr besagen auch die emphatischen Darlegungen E. Mays (G. Hermann - E. May - Th. Vogel, Die Bedeutung der modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis, Leipzig 1937, 100 ff.), der ein getreuer Schüler H. Dinglers ist. Die Letztbedeutungen, wie »Gerade-Sein« usw., läßt er mit der Erfahrung geschaut sein und zwar »für immer, endgültig und in unverbesserlicher Weise« (100). Diese Schau hat aber ihre Berechtigung nur unter der Voraussetzung eben des euklidischen Raumes. In diesem Sinn ist natürlich eine nicht-euklidische Gerade nicht als Gerade zu bezeichnen. Daß diese ursprünglichen Begriffe nach ihrer Erweiterung von den verschiedenen Gegenständen in analoger Weise ausgesagt werden, wurde bereits bemerkt.

Wirklichkeit existiert, ja nicht einmal existieren kann. Die „Gerade“ usw. der Wirklichkeit ist nicht die „Gerade“ dieses Raumes. Als Gerade in der Wirklichkeit gilt die Kante eines starren Stabes oder noch idealer ein hinreichend dünner Lichtstrahl. Die Frage nach der Geltung der euklidischen Geometrie bedeutet also, ob für solche Geraden die Axiome der euklidischen Geometrie in der Weise gültig sind, daß die Geraden die Gesetze erfüllen, die für die euklidischen Geraden durch die Axiome und Sätze gefordert werden. Oder, ob die Winkelsumme in einem „Wirklichkeitsdreieck“, das aus Lichtstrahlen gebildet würde, genau 180 Grad beträgt, wie es in einem Satz der euklidischen Geometrie gefordert wird. Durch Messungen lassen sich die Fragen nicht entscheiden, weil die Abweichungen von der euklidischen Geometrie so gering sind, daß sie unterhalb der Genauigkeitsgrenzen aller unserer Messungen liegen[31].

Durch die *Relativitätstheorie* wird die Frage nach der Wirklichkeitsgeltung der euklidischen Geometrie anscheinend in negativem Sinn entschieden. Dieser Theorie liegt als tiefster Gedanke eine Idee zugrunde, die schon lange Leitmotiv gewesen ist bei mathematischen Überlegungen. In der Mathematik ist man bestrebt, die mathematischen Gebilde nach Invarianten einzuteilen, d. h. die mathematischen Eigenschaften der Gebilde zusammenzufassen, die bei je bestimmten Veränderungen unverändert erhalten bleiben, um auf diese Weise möglichst konstante Beziehungen zu erhalten. So lassen sich dann die den mathematischen Dingen zukommenden Eigenschaften darstellen durch möglichst unabhängige Ausdrücke, die sich bei Transformationen und mathematischen Bewegungen nicht mit verändern. In ähnlicher Weise sucht die Physik die Gesetze der Natur darzustellen durch Formeln, die möglichst unabhängig sind von den Veränderungen des Koordinatensystems und deshalb auch bei Veränderungen des Koordinatensystems ihre Form beibehalten[32]. Durch den bekannten Michelsonversuch ist nun eine Invariante aufgezeigt worden, die in die Invariantengruppe der klassischen, von Galilei und Newton begründeten Mechanik nicht hineinpaßte. Um diese Unzuträglichkeit zu beseitigen, mußte eine andere Transformationsgruppe für die mathematische Beschreibung des Naturgeschehens zugrunde gelegt werden. Das geschah durch die Relativitätstheorie. Als Folgerungen ergaben sich dann für die Wirklichkeit z. B. die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, die Unmöglichkeit, die Gleichzeitigkeit von Ereignissen an verschiedenen Raumstellen

[31] Die zahlenmäßig genauen Angaben finden sich bei F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, 205 ff.

[32] Das Suchen nach höheren Invarianzen als Leitmotiv der physikalischen Forschung wird ausführlich dargestellt von E. Kaila, Über den physikalischen Realitätsbegriff, 40—59.

festzustellen[33] und die Anwendung einer nicht-euklidischen Geometrie für die mathematische Behandlung der wirklichen Welt.

Das besagt aber zunächst wiederum nur, daß eine nicht-euklidische Geometrie das passendste mathematische Ausdrucksmittel ist zur Beschreibung der Naturgesetze. Für den Bereich unseres Anschauungsraumes, in dem sich unser tägliches Leben abspielt, und für Erscheinungen, bei denen keine Geschwindigkeiten von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit auftreten, bleibt nach wie vor die euklidische Geometrie für die Formulierung des Naturgeschehens geeignet, da für diese Gebiete die Geometrie der Relativitätstheorie von selbst in die euklidische Geometrie übergeht. Insofern die Relativitätstheorie eine mathematische Formulierung der Naturgesetze gestattet, die unabhängig ist von der Bezugnahme auf willkürlich gewählte Koordinatensysteme, wird sie als mathematische Theorie gleichberechtigt neben die anderen großen Theorien der Physik gestellt. Sie ist wirklich der angemessenste mathematische Ausdruck für das Geschehen in der Welt des Großen, großer Räume sowohl wie großer Geschwindigkeiten. Eine Anwendung der euklidischen Geometrie in diesen Gebieten hieße, diese Erscheinungen hineinpressen in die Struktur einer wesensfremden mathematischen Gruppe. Um aber die nicht-euklidische Struktur unserer wirklichen Welt zu erweisen, müßten die experimentell nachprüfbaren Folgerungen aus der Relativitätstheorie noch genauer bestätigt werden. Dazu gehören die Perihelbewegung des Merkur, die Rotverschiebung aller Spektrallinien in starken Gravitationsfeldern und die Krümmung von Lichtstrahlen in der Nähe großer Himmelskörper. Diese Erscheinungen konnten zwar durch Beobachtung nachgewiesen werden, aber doch bisher noch nicht mit der quantitativen Genauigkeit, die man wohl fordern müßte, um die weittragende Behauptung einer nicht-euklidischen Weltstruktur als gesichert rechtfertigen zu können[34].

Einstweilen, bevor die zahlenmäßig genaue Nachprüfung obiger Folgerungen aus der Theorie vorliegt, müssen wir uns beschei-

---

[33] Oft wird dieser Tatbestand ausgedrückt: es gibt keine absolute Gleichzeitigkeit. Dieser Ausdrucksweise liegt eine neopositivistische Denkhaltung zugrunde. Aus der mathematischen Theorie folgt nur die Nicht-Feststellbarkeit der Gleichzeitigkeit.

[34] Nicht-euklidische Struktur ist nicht gleichzusetzen mit Vierdimensionalität. Es gibt auch dreidimensionale nicht-euklidische Geometrien. Wenn in der Relativitätstheorie eine vierfache Mannigfaltigkeit auftritt, bedeutet die vierte Koordinate die Zeit. Daß sie nicht gleichberechtigt neben den Raumkoordinaten steht, zeigt die imaginäre Einheit, mit der sie multipliziert ist. Die so formulierten Gleichungen geben eine Beschreibung des gesamten raum-zeitlichen Geschehens, und nicht des räumlichen Geschehens allein. Dieses Raum-Zeit-Kontinuum ist vierdimensional im Sinn einer vierfachen Mannigfaltigkeit, behauptet aber nicht die Existenz eines vierdimensionalen Raumes.

den, zu sagen, die Relativitätstheorie mache es sehr wahrscheinlich, daß in der wirklichen Welt nicht die euklidische, sondern eine nicht-euklidische Geometrie gilt. Das bedeutet, daß wahrscheinlich für die Gebilde der Welt jene Aussagen wahr sind, die in nicht-euklidischen Axiomen und Sätzen ausgesprochen werden. Starre Stäbe, die Trägheitsbahnen der Körper, die Lichtstrahlen wären demnach nicht Geraden im euklidischen Sinn, sondern Geraden einer nicht-euklidischen Geometrie[35].

Wie die Relativitätstheorie für die moderne Makrophysik charakteristisch ist, so ist für die neue Mikrophysik bezeichnend die moderne *Quantentheorie.* In konsequenter Durchführung dieser Theorie im Anschluß an die Erfahrung ergeben sich zwei einander widersprechende mathematische Darstellungen für das Geschehen in der Welt des Kleinsten, die Wellenmechanik und die Quantenmechanik. In der ersteren Auffassung werden den kleinsten Teilchen der materiellen Wirklichkeit Formeln zugeordnet, die einen Wellenvorgang bedeuten, in der letzteren dagegen andere Formeln, die die Teilchen als materielle Partikeln voraussetzen[36]. Trotz ihrer widersprechenden Voraussetzungen sind beide Theorien mathematisch gleichwertig und in gleich ausgezeichneter Weise geeignet, das atomare und subatomare Geschehen mathematisch zu beschreiben und zu beherrschen, mag auch die Quantenmechanik größere Anforderungen an das mathematische Können des theoretischen Physikers stellen. Es können aber nicht beide Auffassungen in vollem Umfang zugleich für die wirkliche Welt gelten. Die bei dieser Anwendung auf die Wirklichkeit gebrauchten mathematischen Gebilde sind Gedankendinge, die als solche in der Wirklichkeit zum mindesten nicht existieren, z. T. sicher auch nicht existieren können. Am einleuchtendsten ist die Unmöglichkeit der Existenz bei *den* Wellen der Wellenmechanik, die in die höchstdimensionalen sog.

---

[35] Es ist nicht korrekt und führte bereits zu vielen Mißverständnissen, von den gekrümmten Räumen oder von dem gekrümmten Raum der Welt oder auch vom räumlichen Krümmungsmaß zu sprechen. Die Krümmung, die gemeint ist, kommt den starren Gebilden der Welt zu, und nicht dem Raum als solchem. Zwar wird in der Sprechweise der Physik unter Raum die mit Körpern und ihren Gravitationsfeldern erfüllte konkrete Welt verstanden, aber die Nicht-Beachtung oder Unkenntnis der verschiedenen Bedeutungen des Wortes »Raum« bei Philosophen und Physikern hat schon viel Unheil gestiftet. Selbst innermathematisch ist der Ausdruck »gekrümmter Raum« zum mindesten schief. Es wird dann jeweils eine weitere umgebende Mannigfaltigkeit, eine um eins höhere Dimensionszahl erfordert, so daß der betreffende gekrümmte Raum in einen höher-dimensionalen Raum eingebettet wäre; eine weitere Dimension ist aber bei den sog. gekrümmten Räumen einer bestimmten Dimensionszahl mathematisch nicht gegeben.

[36] Eine eingehende Darstellung dieser beiden Auffassungen findet sich in unseren beiden Aufsätzen: Das Problem der Kausalität in der modernen Quantenphysik: PhJb 54 (1941) 266—320. — Das Ringen um einen neuen Materiebegriff: Schol 16 (1941) 521—533.

Konfigurationsräume eingebettet gedacht werden. Daß aber etwas in der Wirklichkeit durch diese Begriffe betroffen wird, beweist ihre erfolgreiche Anwendbarkeit zur Beherrschung des Geschehens in der Natur. Es muß also Aufgabe der philosophischen Besinnung sein, das diesen Gedankendingen zugrunde liegende Fundament zu finden, um so den Wirklichkeitsgehalt beider Theorien herauszuschälen. Eine Lösung dieser Aufgabe haben wir unter Berücksichtigung weiterer in Frage kommender Erwägungen bereits an anderer Stelle versucht, soweit es vorläufig möglich scheint[37].

Die reine Mathematik bietet nur Denkmöglichkeiten. Welche dieser Möglichkeiten aber verwirklicht ist, ist eine physikalische Frage. Diese Frage ist jedoch noch nicht dadurch entschieden, daß eine mathematische Theorie sich als geeignetes mathematisches Mittel zur Beschreibung der physikalischen Tatbestände erweist. Es bleibt für jede mathematisch-physikalische Theorie im einzelnen zu untersuchen, inwieweit die verwandten mathematischen Begriffe in der wirklichen Welt ihre Erfüllung finden.

Gregors von Nyssa theologische Anthropologie als Bildtheologie.

Von Johann Bapt. Schoemann.

III. Die entstellte Gottebenbildlichkeit des Menschen.

Der Mensch bewahrte die ursprüngliche Gottebenbildlichkeit nicht[1]; er verlor die ihm eigene Würde, und zwar infolge einer freien Willensentscheidung des ersten Menschen[2]; dessen Wille wurde vom Geist schlecht beraten, sein Geist aber vom Teufel zu einem falschen Urteil über das wahrhaft Gute verleitet[3]. Wir wurden mit dem Stammvater aus dem Paradies geworfen (De Virg. III 373 D); wie ein schlimmer Strom hat sich die Vernichtung, Verarmung von den ersten Menschen auf ihre Nachkommen ergossen (In Ps I 480 B); der Sündenschmutz wird mit der menschlichen Natur zugleich erzeugt (ebd. 609 D). Ursache der Seelenkrankheit[4] war der Ungehorsam der

[37] Siehe den eben genannten Schol-Artikel. Die Auffassung der mathematischen Gebilde als Gedankendinge dürfte eine Ergänzung und Weiterführung der Gedanken des erwähnten Artikels bedeuten.

[1] C. Eun. II 888 D; De Virg. III 372 B.

[2] Or. catech. II 29 C; 33 B; 60 C; 61 A; De mort. III 521 D f.; De Virg. III 369 D f.

[3] Über die Entstehung der ersten Sünde handelt Gr vor allem Or. catech. II c. 21 u. 22; De hom. op. I 200 A—D. — Zur Verwandtschaft dieser Gedanken mit altgriechischer Anschauung vgl. Gronau, Poseidonios, 252 Anm. 1.

[4] Ep. III 1021 A; Pasquali 22,22—29.