Besprechungen

Becker, O., *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung* (Orbis Academicus. Problemgeschichten der Wissenschaft in Dokumenten und Darstellungen). gr. 8° (422 S. mit 62 Zeichnungen im Text) Freiburg-München 1954, Alber. 26.— DM.

B., Professor der Philosophie an der Bonner Universität, veröffentlicht eine Auswahl von Quellentexten mit dem Ziel, „ein Bild der geschichtlichen Entwicklung der Grundlagenproblematik der Mathematik von ihren Anfängen bis heute zu entwerfen" und „die prinzipiellen Gedankenwendungen der mathematischen Grundlagenforschung, oft in Verbindung mit der zeitgenössischen Philosophie, zu skizzieren, ohne auf die technischen Einzelheiten einzugehen" (V). Folgende drei Epochen machen die Grundlagenproblematik besonders deutlich: 1. Die klassische Antike vom 5. bis 3. Jahrh. v. Chr., die Zeit des Aufbruches und der Blüte griechischer Mathematik; 2. Das 17. Jahrh., die Zeit der Entstehung der neueren abendländischen Mathematik; 3. Das 19. und 20. Jahrh. mit „seiner sich ständig steigernden Grundlagenforschung" (1). Die Anordnung der Texte folgt nicht allein der Chronologie, sondern muß auch öfters der Systematik weichen. Kurze erläuternde Zwischenbemerkungen des Verf. verknüpfen die einzelnen Dokumente.

An Stelle einer ins einzelne gehenden Inhaltsangabe möge durch ein Beispiel zum Problem „Darstellung und Wesensart der mathematischen Logoi" gezeigt werden, wie etwa der Leser von diesem wertvollen und anregenden Quellenwerk angesprochen werden kann.

Zur Frage nach der Begründung der Irrationalzahlen findet man in der Sammlung Verfahren, die in ihrer rechnerischen Handhabung leicht unterscheidbar sind, weniger dagegen in der logischen Ortsbestimmung. Es sind u. a. das Anthyphairetische und Eudoxische (78—87, 109—116), das Dedekindsche (224—245) und das Cantorsche Verfahren (245—251). Zur Beurteilung dieser Verfahren muß folgenden Fragen Beachtung geschenkt werden: 1. Wie versuchen die einzelnen Verfahren, das Verhältnis zweier vorgegebener Größen darzustellen? 2. Wie spiegeln die einzelnen Verfahren die algorithmischen Beziehungen zwischen den Logoi wider? 3. Sollen alle Verhältnisse irgendeiner wohldefinierten Menge erfaßt werden, und welche Kontrollmittel der Vollständigkeit stehen zur Verfügung?

Zur Begründung der Irrationalzahlen geht das *Anthyphairetische Verfahren* (A-Verfahren) von zwei gleichartigen und vergleichbaren Größen P und Q, die im Logos λ stehen, aus. Durch die Gleichungen

$$P = x_0 Q + R \qquad x_0 \text{ positiv ganz}, R < Q,$$
$$Q = x_1 R + S \qquad x_1 \text{ positiv ganz}, S < R,$$

bestimmt es eine Folge von positiven ganzen Zahlen $(x_0, x_1, \ldots)$, welche man die „A-Zeiger" von λ nennen kann. Unter welchen Bedingungen nun dieses Verfahren möglich ist und die „Zeigerfolge" eindeutig bestimmt ist, ist nicht leicht einsichtig. Neben den vom Verf. (Eudoxos-Studien II 378—382) aus der Antike erörterten Beispielen gibt es noch andere, wo das Versagen ganz andere Gründe hat. Das hängt einmal von der Eindeutigkeit der Primteilerzerlegung ab und ob alle Ideale Hauptideale sind. Existiert anderseits eine „A-Zeigerfolge", dann ist diese wenigstens eindeutig. Umgekehrt kann man fragen, ob die Menge aller „A-Zeigerfolgen" und aller reellen Verhältnisse sich abpaaren lassen. Die obengenannte zweite Frage besagt in diesem Verfahren die schwache Seite. Während in der Antike die Aufstellung einzelner Logoi und die Beweise für die Logosgleichheit und Logosungleichheit fast vollständig ausgearbeitet wurde, wurden die algorithmischen Beziehungen der Logoi kaum beachtet. Man müßte, wenn $\xi \rightarrow [x_0, \ldots]$, $\eta \rightarrow [y_0, \ldots]$, $\xi\eta \rightarrow [p_0, \ldots]$, $\xi + \eta \rightarrow [s_0, \ldots]$, die „Zeiger" p_i und s_i allein, durch die „Zeiger" x_i und x_i ausdrücken können. Man muß wissen, daß dieses Verfahren nicht selbständig auftrat, sondern es war nur ein Mittel zum Beweis der Logosgleichheit (Top. 158 b 33—35). Zum Verständnis dieses Verfahrens sei noch darauf hingewiesen, daß die „Zeigerfolge" sowohl als Zahlenmenge wie auch als Zahlenfolge eindeutig bestimmt ist. An jedem Platz soll eine bestimmte Zahl stehen. Die Feststellung allerdings, welche

Zahl an welchem Platz steht, kann auch in einer anderen als natürlichen Reihenfolge geschehen, wie es bei den Kettenbrüchen möglich ist.

Das Verfahren des *Eudoxos* dagegen geht von einer vorliegenden Menge von mindestens zwei Paaren gleichartiger und vergleichbarer Größen aus. Diese Paarmenge, welche zunächst unbestimmt bleiben soll, wird in Klassen eingeteilt, von denen jede zu einer höheren Einheit zusammengefaßt als Logos bezeichnet wird. Zwei Paare stehen dann in derselben Klasse (ἐν τῷ ἀυτῷ λόγῳ), wenn Eukl. V, Def. 5 (vgl. Verf. 84) gilt. Nach Eukl. V, Def. 7 wird zwischen den Klassen eine künstliche größenartige Beziehung konstruiert. Verschiedene Sätze im 5. Buche sollen den Größencharakter dieser Beziehungen sichern, wobei leider die algorithmische Verknüpfung der Klassen untereinander fehlt. Nicht ganz dasselbe bedeutet die in Satz 1 vorkommende und als assoziativ nachgewiesene Verknüpfung. Näher liegen die zusammengesetzten Logoi von Eukl. VI, Def. 5 und Satz 23, die wir Produkte nennen. Auf die dritte der obigen allgemeinen Fragen antwortet dieses Verfahren, daß es ebenso viele Größenpaare gibt, als man Paare von Größen nehmen kann. Aber wie viele sind das? Wann ist für die Griechen eine Größe, vor allem eine geometrische Größe „gegeben"? Damit kehrt die alte Frage, ob die Konstruktion als Existenzsicherung galt, zurück. Hierin besteht zwischen beiden Verfahren ein gewaltiger Unterschied. Wenn die betreffenden Einzelgrößen vorhanden sind, dann kommt das Eudoxische Verfahren in den Gang, das Anthyphairetische dagegen greift zu einer „Darstellung" im obigen Sinne und kann die umgekehrte Frage leichter stellen, da die Existenz der verschiedenen möglichen „Zeigerfolgen" mit der Existenz der Zahlen selbst mitgesichert ist und von der Existenz der Größen gar nicht abhängt. Der Sinn der Frage also, ob „alle" Logoi erfaßt sind, ist in beiden Verfahren nicht derselbe.

Von diesen beiden Verfahren unterscheidet sich jenes, welches als *Dedekindscher Schnitt* bekannt ist und voraussetzt, daß die Menge aller rationalen Zahlen als Betätigungsfeld vorliegt (vgl. O. Perron, Algebra I, 1932; II, 1933; Irrationalzahlen, 1921). Es werden Zweiteilungen, die Schnitte heißen und drei Bedingungen zu erfüllen haben, vorgenommen. Eine logische Aussage definiert jeden Schnitt. Auf diese Weise entstehen die rationalen und die irrationalen Schnitte. Hier muß man unterscheiden die ältere und die neuere, algebraisierte Gestalt der Dedekindschen Theorie. Während man früher sagte, daß „jedes irrationale Verhältnis einen bestimmten Platz unter den rationalen zugewiesen bekommt", müssen die logischen Schritte jetzt feiner zerlegt werden, da es nicht möglich ist, daß eine Irrationalzahl als Schnitt und eine Rationalzahl als Einzelzahl in einer Größenbeziehung zueinander stehen. Zuerst kommen die rationalen Einzelzahlen, dann die rationalen Schnitte, endlich die irrationalen Schnitte. Sowohl bei den algorithmischen Beziehungen wie bei den größenartigen Beziehungen geht man zuerst von den rationalen Einzelzahlen zu den rationalen Schnitten auf dem Wege des *Isomorphismus* und dann erst von den rationalen Schnitten zu den irrationalen Schnitten auf dem Wege der *Gleichartigkeit.* Ferner werden zweierlei Schnitte in zwei verschiedenen Augenblicken zu zwei verschiedenen Zwecken vorgenommen. Zuerst teilt man die Menge der rationalen Einzelzahlen in Unterklassen und Oberklassen, sowohl um die irrationalen wie die rationalen Schnitte zu erhalten. Nachdem eine S-Funktion und eine P-Funktion festgelegt ist, prüft man, ob die Ring- und Körpereigenschaften verifiziert sind. Am Schluß wird eine zweite Reihe von Zweiteilungen vorgenommen, indem die neue Menge aller rationalen und irrationalen Schnitte in Oberklassen und Unterklassen geteilt wird, wobei sich herausstellt, daß bei dieser zweiten Menge von Teilungen keine Unter- und Oberklasse offenbleiben. Die neue Schnittbildung erweist sich somit als überflüssig, das Verfahren ist im wesentlichen unwiederholbar, und die Menge aller Schnitte unter den rationalen Einzelzahlen bildet ein Kontinuum. Der Ausdruck „Menge aller rationalen Einzelzahlen" (s. o.) birgt logische Schwierigkeiten; noch größere aber und bis heute teilweise noch unerledigte Schwierigkeiten liegen in dem Begriff „Menge aller Schnitte". Von den drei Fragen, die an den Anfang dieser Einzelausführung gestellt wurden, zeigt die dritte den schwachen Punkt dieses Verfahrens an, die zweite dagegen weist auf seinen Glanzpunkt hin. Mit dem Anthyphairetischen Verfahren und seiner zwangsläufigen

Reihenfolge der Glieder hat diese Ordnungsfähigkeit aller Schnitte nichts zu tun (vgl. auch Verf. 237).

Man kann nun auch — darauf sei ganz kurz hingewiesen — die Problematik des Dedekindschen Verfahrens weiter verfolgen, wenn man es in Verbindung bringt mit der Typentheorie. Diese kommt zwar bei der Aufstellung einzelner bestimmter Dedekindscher Schnitte nicht in Frage, wohl aber beim Gebrauch der Dedekindschen Konstruktion zu Beweiszwecken, worauf H. Weyl (Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, 1918, § 6) aufmerksam macht (vgl. auch Verf. 336—351). Der Satz von der oberen Grenze ist dafür das einfachste Beispiel. Nach Weyl hängt die Definition des neuen Schnittes von der Formel „Es gibt einen Schnitt" ab, wodurch nach Weyl die Typenhierarchie durchbrochen werde (a.a.O. 23). Aus dem Einwand Weyls ging die Brouwer-Weylsche Entwicklungsstufe des „Intuitionismus" hervor (vgl. A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie, 1934).

Das interessanteste Verfahren ist das von *Cantor*, welches sich am leichtesten algebraisieren und in Beziehung bringen läßt mit der Theorie der Ideale und der durch diese hervorgerufenen Klassenringe. Ferner wird man sowohl das Verfahren von Weierstraß hinzunehmen wie das von Bachmann, der mit Intervallenschachtelungen, deren sämtliche Endpunktepaare rational sind, arbeitet. Die angegebenen Vergleiche sind zur Erforschung der antiken Logikgeschichte notwendig.

Dieses knappe Beispiel von Textinterpretationen an Hand des gebotenen Quellenmaterials macht es deutlich, wie sehr im Geist der Griechen neben der Philosophie die Mathematik seine arteigene Leistung ist, die ja u. a. auch für die Auslegung Platons und Aristoteles' von Wichtigkeit ist (vgl. auch Ref. in Scholastik XXIX [1954] 97—99). Das Quellenwerk wird aber auch anregen können zu Untersuchungen, die zwar über dessen Rahmen hinausgehen, aber doch sehr eng mit ihm verbunden sind. Als Beispiel sei folgendes erwähnt: In dem vom Verf. oft zitierten Buch VII der Elemente des Euklid gibt es Ausführungen zur eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren: (1) Die Möglichkeit der Zerlegung: B. VII, Satz 32; (2) Die Vorbereitung auf den Eindeutigkeitsbeweis: B. VII, Satz 4; Satz 2 mit Korollar; Satz 1 und 2, Def. 13; Satz 29, Satz 30; (3) Eindeutigkeitssatz: B. IX, Satz 13, falls $f = p^n$; B. IX, Satz 14, falls $f = p$, $q_2 = p_r$. Diese antike Leistung wird man besonders würdigen können, wenn man die entsprechenden Ausführungen von H. Hasse, Höhere Algebra, Bd. II (Göschen 932), Berlin 1927, zum Vergleich hinzunimmt. Durch solche Untersuchungen wird man das wissenschaftliche Antlitz der griechischen Mathematik herausarbeiten können, deren Eigenart kurz folgende Worte umschreiben: Problemtiefe, strenge Deduktion; weniger Abstraktion als logischer Konstruktivismus; Vorherrschaft der Zahlentheorie, der Algebra und der Analysis über die bloße Geometrie; vollständige Aufzählung von Lösungen mit Diorismos usf. Vor allem wird man erkennen, in welchem Maße die Geburt der modernen Mathematik der griechischen verpflichtet ist.

Den Philosophen belehrt diese Dokumentensammlung u. a. auch darüber, daß die Berührung von Philosophie und Mathematik in der Antike nicht auf dem engen Gebiet von Schulmathematik stattfand und daß deren Kenntnis Voraussetzung ist *vor* der Spekulation über sie. Ein solch fruchtbares und vorausgesetztes Wissen betrifft wichtige Begriffe und Theorien, wie z. B. Gruppe, Ring, Körper, Transformation, Axiomatik, Isomorphismus, Meromorphismus, Äquivalenzbeziehungen, Klasseneinteilung usf.

Diese Sammlung von Originaldokumenten dürfte wohl auch den scholastischen Philosophen anregen zur Frage nach dem Verhältnis seiner Philosophie zur Mathematik. Den Anfang wird wohl eine tiefere *geschichtliche Besinnung* machen (vgl. schon O. Becker und Jos. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Bonn 1951, 149 bis 153; C. H. Haskins, Studies in the History of Mediaeval Science, Cambridge 1924; G. Sarton, Introduction to the History of Science, Bd. II, 12. und 13. Jahrh., in Sammlung: Carnegie Institute of Washington). Falls z. B. den Aufgabensammlungen des Mittelalters, wie den „Propositiones ad acuendos iuvenes", Lösungen beigegeben sind, vermißt man das Bedürfnis, die Gesamtheit der Lösungen aufzudecken und ihre Struktur zu untersuchen. Man wird ferner beachten müssen, daß z. B. Wilhelm von Moerbeke Proklosübersetzungen anfertigte und fast den ganzen Archimedes übersetzte (vgl. M. Grabmann, Die Proklosübersetzungen des W. v. Moerbeke und ihre Verwertung in der lateinischen Literatur des Mittelalters: Byzantinische Zeitschrift 30 [1929—1930] 78—88; jetzt auch in: Mittelalterliches Geistesleben II, München 1936, 413—424). Die bekannte Abhandlung „De totius logicae Aristotelis summa", welche früher als Opusculum 48 des Thomas von Aquino abgedruckt wurde, enthält u. a. die halbe Oresmesche Theorie der latitudines formarum. Endlich sei erinnert an die mehr als 380 mathematischen Kundgebungen in den Werken des Aquinaten, welche alle noch gesammelt, sachlich geordnet, kritisch und synthetisch überarbeitet werden müssen, nach dem ausgezeichneten Vorbild etwa der Altertumswissenschaft. Dann wird man wohl erst fruchtbar z. B. über die Mathematik des Thomas von Aquino „spekulieren" können. Zu den hierbei erforderlichen Zusätzen wird ein ähnlicher Überblick auf die Mathematik des Stagiriten nötig sein. Unvollständig sind noch: Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles, Leipzig 1904; Görland, Aristoteles und die Mathematik, Marburg 1899; Blancanus, Aristotelis loca mathematica, Bologna 1615. Von den hier erhobenen Forderungen aus gesehen, wird man wohl schwerlich Arbeiten zustimmen können, wie sie etwa vertreten werden von *E. Bodewig,* Die Stellung des hl. Thomas von Aquino zur Mathematik, in: Archiv für Geschichte der Philosophie Bd. 41, 401—434. K. Ennen S. J.

Meyer, Hans, *Systematische Philosophie. Band 1: Allgemeine Wissenschaftstheorie und Erkenntnislehre.* gr. 8⁰ (VIII u. 445 S.) Paderborn 1955, Schöningh. 22.— DM; Subskription 20.— DM.

Hans Meyer, der uns als Frucht einer nunmehr 45jährigen Lehrtätigkeit die von einer erstaunlichen Beherrschung des Stoffes zeugende fünfbändige „Geschichte der abendländischen Weltanschauung" geschenkt hat, will jetzt auch die systematische Philosophie in einem großen, vierbändigen Werk zusammenfassen. Der vorliegende 1. Bd. behandelt die Erkenntnis- und Wissenschaftslehre, der 2. Bd. soll der Metaphysik, der 3. der Ethik, Rechts- und Staatsphilosophie gewidmet sein, der 4. Bd. soll eine „vergleichende Psychologie" aus der Feder von M.s Schüler *V. Rüfner* enthalten.

Der 1. Abschnitt der Erkenntnislehre enthält „allgemeine Erörterungen zur Wissenschaftslehre" (5—66), der 2., umfangreichste Abschnitt behandelt die „allgemeine Erkenntnislehre" bzw. „die Grundprobleme der Logik" (67—273), der 3. Abschnitt erörtert „spezielle Erkenntnisprobleme" (274—436); es folgen Personen- und Sachverzeichnis. Der *1. Abschnitt* bringt zunächst Betrachtungen über die Struktur und Wesensart der Wissenschaft. Bemerkenswert sind hier vor allem die Ausführungen über die Notwendigkeit des Systems, aber eines offenen Systems (10 f.), über die vorwärtstreibende Kraft des Irrtums (11), die Notwendigkeit einer Weiterarbeit auf dem Fundament der Alten (12), über die Unmöglichkeit der Voraussetzungslosigkeit (16), die falsche Deutung der „Einheit der Wissenschaft" im Positivismus; bei der Frage der Voraussetzungslosigkeit wünschte man eine klarere Unterscheidung von logischen Voraussetzungen und ontischen Vorbedingungen. Es folgt ein Kap. über die Einteilung der Wissenschaften; in Auseinandersetzung mit Rickert werden die Natur- und Geisteswissenschaften nach ihrem Objekt, nicht in erster Linie nach ihrer verschiedenen Methode gegeneinander abgegrenzt. Das folgende Kap. über die Philosophie gibt eine kleine Einleitung in die Philosophie, indem es in historischer Abfolge die verschiedenen Auffassungen über Wesen und Sinn der Philosophie kritisch erörtert. Den Abschluß des 1. Teiles bildet ein kurzes Kap. über Wissenschaft und Weltanschauung.

Der *2. Abschnitt* umgrenzt zunächst den Aufgabenbereich der Logik. Logik ist für M. die Wissenschaft, welche die Voraussetzungen, Bedingungen und Regeln feststellt, die für ein Denken gelten, das die Wahrheit erreichen will (67). „Nur eine erkenntnistheoretische Logik wird den Problemen gerecht" (69). „Die Logik faßt die Urteile nicht rein für sich ins Auge, ohne sie an den Gegenständen und ihren Sachverhalten zu messen" (69). Dieser Logik-Begriff wird andern Auffassungen von Logik, namentlich der logistischen Auffassung, gegenübergestellt. Es folgen dann zwei Kap., in denen die Logik gegen Psychologie und Grammatik (nicht aber gegen Erkenntnistheorie) abgegrenzt und in ihrer geschichtlichen Entwicklung